

# V Olimpiada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 27 de Agosto de 2003.  
Segundo día

**Problema 4.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos  $P$  y  $Q$ . Sean  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos rectas paralelas, tales que:

- i.  $\ell_1$  pasa por el punto  $P$  e intersecta a  $S_1$  en un punto  $A_1$  distinto de  $P$  y a  $S_2$  en un punto  $A_2$  distinto de  $P$ .
- ii.  $\ell_2$  pasa por el punto  $Q$  e intersecta a  $S_1$  en un punto  $B_1$  distinto de  $Q$  y a  $S_2$  en un punto  $B_2$  distinto de  $Q$ .

Demostrar que los triángulos  $A_1QA_2$  y  $B_1PB_2$  tienen igual perímetro.

**Problema 5.** Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

**Problema 6.** Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

- i. Demostrar que existe un entero positivo  $N$  tal que sus primeros 2003 múltiplos,  $N, 2N, 3N, \dots, 2003N$ , son todos *ticos*.
- ii. ¿Existe algún entero positivo  $N$  tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

**Tiempo: 4 horas 30 minutos.**  
**Cada Problema vale 7 puntos.**