

V Olimpiada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 25 al 30 de Agosto de 2003.
Soluciones Prueba 1 y Prueba 2

Problema 1.

Solución oficial: Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora. Nótese que en cada jugada se retira al menos 1 piedra, por lo que siempre debe existir un perdedor.

Al inicio, A en su turno recibe un montón impar de piedras (2003). Como todos los divisores de un impar son impares, A dejará a B un número par de piedras (impar-impar = par).

- Si le deja 0 piedras, que es par, B gana.
- Si le deja un número par de piedras mayor a 0, B retira cualquier divisor impar del número de piedras restantes (por ejemplo 1) y de este modo le deja de nuevo a A un montón impar de piedras. Si B repite sucesivamente este método nunca perderá ya que siempre deja al menos 1 piedra. Entonces A será el perdedor y B se asegura la victoria.

Problema 2.

Solución oficial: Como $\angle AGB = \angle AHB = 90^\circ$ y los triángulos AGB y AHB tienen el lado común AB , serán suficiente con demostrar que $\angle ABH = \angle ABG$ pues entonces los triángulos AGB y AHB son congruentes y por tanto $AG = AH$.

Como $AEBH$ y $AGBF$ son cuadriláteros cíclicos, entonces $\angle AEH = \angle ABH$ y $\angle GBA = \angle GFA$.

Ahora, como $\angle AEH + \angle CED = 180^\circ = \angle GFA + \angle CFD$, si $\angle CED = \angle CFD$, entonces $\angle AEH = \angle GFA$.

Para demostrar que $\angle CED = \angle CFD$ basta demostrar que $CEFD$ es cíclico. Esto se sigue de ver que el triángulo ABE es semejante al triángulo ABC y que el triángulo AFB es semejante al triángulo ABD .

Entonces de la primera semejanza, $AB^2 = AE \cdot AC$ y de la segunda semejanza, $AB^2 = AD \cdot AF$. En consecuencia, $AE \cdot AC = AD \cdot AF$ y $CEFD$ es cíclico.

Otra manera de probar que $CEFD$ es cíclico es observando que los triángulos AEB y ABC son semejantes ya que son rectángulos y comparten el ángulo $\angle EAB = \angle CAB$. Por lo tanto $\angle ABE = \angle BCA$.

Además $\angle ABE = \angle AFE$ ya que $ABEF$ es cíclico y ambos ángulos subtienen el mismo arco. Luego

$$\angle EFD = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle ECD.$$

Por lo tanto, $\angle EFD + \angle ECD = 180^\circ$ y $CEFD$ es cíclico.

Problema 3.

Solución oficial: Se procederá por inducción sobre b .

Para $b = 3$, se tiene que $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$. Para mostrar que esta expresión es mayor que $3(a+1)$ es suficiente demostrar que $(a^2 - a + 1) \geq 3$, lo cual es cierto pues $a^2 - a + 1 > a(a-1) \geq 2$.

Ahora supóngase que la expresión es cierta para algún valor de b , es decir, se cumple que $a^b + 1 \geq b(a+1)$. Se demostrará ahora para $b+1$.

Nótese que

$$a^{b+1} + 1 = a(a^b + 1) - (a+1) + 2 \geq ab(a+1) - (a+1) + 2,$$

donde la última desigualdad se tiene por la hipótesis de inducción. La última expresión se puede reescribir como

$$ab(a+1) - (a+1) + 2 = (a+1)(ab-1) + 2 > (ab-1)(a+1).$$

Finalmente, $ab-1 \geq 2b-1 = (b+1) + (b-2) > b+1$, lo cual es cierto.

Por tanto, la desigualdad se vuelve estricta después de $b = 3$. Retomando el caso $b = 3$, se observa que $a(a-1) = 2$ únicamente cuando $a = 2$. Por tanto, se ha demostrado por inducción que la desigualdad siempre se tiene, y que la igualdad se da únicamente en el caso $a = 2, b = 3$. Esto concluye la solución.

Solución alternativa 1: $a \geq 2, b \geq 3$, dividimos en dos casos:

1. b impar.

$$a^b + 1 = (a+1)(a^{b-1} - a^{b-2} + a^{b-3} - a^{b-4} + \dots + a^2 - a + 1)$$

como $a + 1 > 0$, basta demostrar que

$$(a^{b-1} - a^{b-2}) + (a^{b-3} - a^{b-4}) + \cdots + (a^2 - a) + 1 \geq b \quad (*).$$

Del lado izquierdo tenemos $\frac{b-1}{2}$ sumandos entre paréntesis, cada uno de ellos mayor o igual a $a^2 - a = a(a-1) \geq 2 \cdot 1 = 2$. Por tanto el lado izquierdo es mayor o igual a $\frac{b-1}{2}$ veces 2 mas 1, es decir, mayor o igual a b . Con ello se prueba la desigualdad requerida (*).

Obsérvese que si $a > 2$ entonces $a^2 - a > 2$ y la desigualdad es estricta.

Además, todos los sumandos entre paréntesis en (*) son de la forma $a^n(a^2 - a)$ con $n \geq 0$ par.

Luego, si $n \geq 2$, $a^n(a^2 - a) \geq a^2(a^2 - 1) \geq 4 \cdot 2 = 8 > 2$. Entonces, si $b > 3$ en (*) hay más de un sumando entre paréntesis y por tanto alguno mayor a 2. Así, la desigualdad es estricta para $b > 3$.

2. b par. Utilizaremos el caso anterior.

$$\begin{aligned} a^b + 1 &= a^{b-1} + 1 + a^{b-1}(a-1) \geq (b-1)(a+1) + a^{b-1}(a-1) \\ &\geq (b-1)(a+1) + a^{b-1} = b(a+1) + a^{b-1} - a - 1. \end{aligned}$$

Para concluir, nótese que como $b-1 \geq 3$, $a^{b-1} - a - 1 > 0$. Así que

$$a^b + 1 \geq b(a+1) + a^{b-1} - a - 1 > b(a+1).$$

La igualdad ocurre sólo si $a = 2$ y $b = 3$.

Solución alternativa 2: Se procederá por inducción sobre a .

Para $a = 2$ se tiene que mostrar que

$$2^b + 1 \geq 3b.$$

Esta desigualdad se probará, a su vez por inducción sobre b .

Para $b = 3$, $2^3 + 1 = 3 \cdot 3$ y se cumple la igualdad para $a = 2, b = 3$. Supóngase que $2^b + 1 \geq 3b$ para un valor de $b \geq 3$. Como se cumple que $2^b > 3$, sumando ambas desigualdades se tiene que $2^{b+1} + 1 \geq 3(b+1)$ con lo cual además vemos que si $a = 2$ sólo hay igualdad para $b = 3$.

Ahora concluiremos la inducción. Supongamos que

$$a^b + 1 \geq b(a+1),$$

para algún valor de $a \geq 2$ y $b \geq 3$. Luego

$$(a+1)^b + 1 = a^b + \binom{b}{1}a^{b-1} + \dots + 1^b + 1 \geq b(a+2).$$

Esto completa la inducción y además muestra que si $a > 2$, no se cumple la igualdad. Por tanto, la desigualdad siempre se tiene, con igualdad solamente si $a = 2$ y $b = 3$.

Solución alternativa 3:

Notemos que $2^n \geq n + 1$ para $n \geq 0$. Entonces, si $a = 2$ tenemos

$$a^b = 2^b = 4 \cdot 2^{b-2} \geq 4(b-1),$$

y claramente $4(b-1) > 3b-1$ pra $b > 3$. Para $b = 3$ se da la igualdad.

Ahora, si $a > 2$ tenemos

$$\begin{aligned} a^b &= (1 + (a-1))^b \geq (a-1)^b + b(a-1) + 1 \geq 2^b + b(a-1) + 1 \\ &= 2 \cdot 2^{b-1} + b(a-1) + 1 > 2(b-1) + b(a-1) + 1 = b(a+1) - 1. \end{aligned}$$

Solución alternativa 4: Consideramos las sucesiones de números entre 1 y a de longitud b . En total, hay a^b sucesiones de éstas. Veremos que si $a \geq 3$ ó $a = 2$ y $b \geq 4$ hay al menos $(a+1)b$ sucesiones distintas.

Caso $a \geq 3$:

$$\begin{aligned} \underbrace{11 \dots 1k1 \dots 1}_b \text{ con } k > 1 &\rightarrow (a-1)b \text{ sucesiones} \\ \underbrace{11 \dots 122 \dots 1}_b &\rightarrow b \text{ sucesiones} \\ \underbrace{11 \dots 133 \dots 1}_b &\rightarrow b \text{ sucesiones} \end{aligned}$$

en estos últimos casos consideramos también $21 \dots 12$ y $31 \dots 13$

Luego, $(a-1)b + b + b = (a+1)b$

Caso $a = 2, b > 3$:

$$\underbrace{11 \dots 121 \dots 1}_b \rightarrow b \text{ sucesiones}$$

$$\underbrace{11 \dots 1221 \dots 1}_b \rightarrow b \text{ sucesiones}$$

$$\underbrace{11 \dots 12221 \dots 1}_b \rightarrow b \text{ sucesiones}$$

en estos últimos casos consideramos también $21 \dots 12$ y $2211 \dots 12$ y $21 \dots 122$. Nótese que las sucesiones el último caso son distintas pues $b > 3$.

Luego si $a > 2ób > 3$

$$a^b \geq b(a+1) > b(a+1) - 1.$$

Si $a = 2yb = 3$ se da la igualdad.

Problema 4.

Solución oficial: Se demostrará que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, de donde el resultado se sigue de forma inmediata.

Nótese inicialmente que como $A_1P \parallel B_1Q$, entonces A_1PQB_1 es un trapecio isósceles y sus diagonales son iguales, de donde $A_1Q = B_1P$. Ahora bien, como $\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$ por estar inscritos en el mismo arco, y $\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$ por la misma razón, entonces $\triangle A_1QA_2$ y $\triangle B_1PB_2$ son semejantes. Como ya se demostró la igualdad entre un par de lados adyacentes, la congruencia de los triángulos se sigue, y el resultado es ahora inmediato.

Solución alternativa 1:

$\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$, por estar inscritos en el mismo arco en S_1 .

$\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$, por estar inscritos en el mismo arco en S_2 .

A_2B_2QP es cíclico, por lo que:

$$\angle A_2B_2Q = \angle A_1PQ(1)$$

A_1PQB_1 es cíclico, por lo que:

$$\angle A_1PQ = 180^\circ - \angle QB_1A_1(2)$$

De (1) y (2) se sigue que $\angle A_2B_2Q + \angle QB_1A_1 = 180^\circ$, por lo que $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Así, $A_1A_2B_2B_1$ es un paralelogramo y sus lados opuestos son iguales y ello implica que $A_1A_2 = B_1B_2$.

Finalmente, por el criterio de congruencia ángulo-lado-ángulo, los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, y el resultado se sigue.

Nota: De hecho, se puede demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes si y sólo si $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ o $A_1B_1 \parallel PQ \parallel A_2B_2$. Se ha utilizado la formulación propuesta para no mostrar tan claramente, desde el enunciado, lo que se debe hacer.

Solución alternativa 2:

$\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$, y $\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$ por estar inscritos en un mismo arco. Luego A_1A_2Q y B_1B_2P son triángulos semejantes. La altura correspondiente a Q y a P en dichos triángulos es la distancia entre las rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2 . Por tanto, por tener una altura correspondiente igual y ser semejantes, A_1A_2Q y B_1B_2P son congruentes y el resultado se sigue.

Problema 5.

Solución oficial: Coloreemos la primera fila de casillas de cualquier manera y tratemos de extender la coloración a todo el tablero. Si dos casillas consecutivas de la primera fila tienen el mismo color, las dos que están debajo de ellas en la segunda fila deben recibir el color opuesto, y es fácil ver que hay una única manera admisible de colorear las casillas restantes de la segunda fila, a saber, con el color opuesto al de la casilla correspondiente en la primera fila. Este razonamiento se repite para la tercera, la cuarta... hasta la última fila. En cambio si en la primera fila no hay casillas consecutivas del mismo color, es decir si se colorea BNBNNBNB o NBNBNBNB, entonces la segunda fila admite cualquiera de esas dos coloraciones alternadas, y lo mismo la tercera y las filas restantes. En resumen, cada una de las dos coloraciones alternadas de la primera fila se puede extender de 2^7 maneras, mientras que cada una de las $2^8 - 2$ coloraciones no alternadas se extiende de manera única. En total se obtienen entonces $2 \cdot 2^7 + 2^8 - 2 = 2^9 - 2 = 510$ coloraciones.

Solución alternativa:

Cada fila del tablero admite dos coloraciones alternadas”, a saber BNBNNBNB y NBNBNBNB. Si cada fila se colorea de alguna de estas dos maneras se obtiene $2^8 = 256$ coloraciones válidas.

Hay sólo 2 coloraciones que pueden obtenerse de ambas maneras, es decir que tienen cada fila y cada columna alternada: son las coloraciones del tablero de ajedrez (con la casilla inferior derecha blanca) y su opuesta. Por lo tanto hay $2^8 + 2^8 - 2 = 256 + 256 - 2 = 510$ coloraciones válidas que tienen todas

las filas alternadas ó todas las columnas alternadas.

Ahora veamos veamos que no hay más coloraciones válidas que éstas 510. Si hubiese otra, tendría alguna fila i con dos casillas contiguas $(i, j), (i, j + 1)$ del mismo color. Es fácil ver que para cualquier fila i' las casillas $(i, j), (i, j + 1)$ son del mismo color. Análogamente, existe una columna h con dos casillas contiguas $(k, h), (k + 1, h)$ del mismo color, y para cualquier h' se debe cumplir que $(k, h'), (k + 1, h')$ son del mismo color. Pero entonces las cuatro casillas $(k, h), (k + 1, h), (k, h'), (k + 1, h')$ serían del mismo color y por tanto la coloración del tablero no sería válida.

Problema 6.

Solución oficial:

1. i. Se construye N con 2003 unos (1's) separados por grupos de tres (3) ceros. Así:

$$N = 1000100010001 \cdots 100010001.$$

Si $s(n)$ denota la suma de los dígitos de n , entonces $s(N) = 2003$. Si k es un entero entre 1 y 2003, $N \cdot k$ es igual a 2003 k 's separados por grupo de 3,2,1 ó 0 ceros, de acuerdo a si k tiene 1,2,3 ó 4 cifras. En cualquier caso, $s(N \cdot k) = 2003k$ y $N \cdot k$ es *tico*.

- ii. Supongamos que existe un tal número N . Escribimos $N = 2^\alpha 5^\beta N_1$ donde N_1 es coprimo con 10. Sea $\gamma := \max\{\alpha, \beta\}$. Para cada entero positivo m , tenemos que $m \cdot 2^{\gamma-\alpha} \cdot 5^{\gamma-\beta} = m \cdot N_1 \cdot 10^\gamma$ y $s(mN_1 10^\gamma) = s(mN_1)$. Por lo tanto, podemos suponer que N es coprimo con 10 (si no, cambiamos N por N_1).

Como N_1 es coprimo con 10, es bien conocido que existe un múltiplo suyo A de la forma

$$A := \underbrace{11 \dots 1}_{\ell \text{ veces}}$$

(de hecho, tomando $M = 9N$ y poniendo $\ell := \phi(M)$ por el Teorema de Euler tenemos que $10^{\phi(M)} - 1 \equiv 0 \pmod{9N}$, y por lo tanto,

$$\underbrace{11 \dots 1}_{\phi(M) \text{ veces}} = \frac{10^{\phi(M)} - 1}{9}$$

se divide por N).

Entonces A es un múltiplo de N y $s(A) = \ell$. Por lo tanto ℓ es un múltiplo de 2003. De acá se puede concluir de dos maneras:

1. Entonces $6A$ y $4 \cdot 10^{\ell-1}A$ son múltiplos de N y la suma de ellos también, y es

$$\underbrace{44 \dots 4}_{\ell-2 \text{ veces}} \underbrace{5066 \dots 6}_{\ell-1 \text{ veces}}$$

cuya suma de dígitos es $4(\ell-2) + 5 + 6(\ell-1) = 10\ell - 9$. Como ℓ se divide por 2003, $10\ell - 9$ no se puede dividir por 2003, y hemos obtenido la contradicción deseada.

2. Tenemos

$$A := \underbrace{11 \dots 1}_{\ell \text{ veces}}$$

entonces $A \cdot 19$ es

$$\underbrace{99 \dots 9}_{\ell \text{ veces}} + \underbrace{11 \dots 10}_{\ell \text{ veces}} = \underbrace{211 \dots 109}_{\ell-2 \text{ veces}}$$

y por tanto $s(A \cdot 19) = \ell + 9$. Pero ℓ y $\ell + 9$ no pueden ser simultáneamente múltiplos de 2003.

Solución alternativa para ii.:

ii. La respuesta es no. Se procederá por reducción al absurdo. Supongamos que existe $N = a_1 a_2 \dots a_n$ con la propiedad que $k \cdot A$ es *tico* para todo k entero positivo. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $a_n \neq 0$, ya que si $N = 10^t \cdot x$, entonces x también tiene la propiedad porque $s(k \cdot 10^t \cdot x) = s(k \cdot x)$. Entonces, calcularemos $s((10^n - 1)N)$ y $s((10^{n+1} - 1)N)$:

- Si N , en base 10, es $a_1 a_2 \dots a_n$, entonces $(10^n - 1)N$, en base 10, es

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n - 1) (9 - a_1) (9 - a_2) \dots (9 - a_{n-1}) (10 - a_n)$$

y así $s((10^n - 1)N) = 9n$.

- $(10^{n+1} - 1)N$, en base 10, es

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n - 1) 9 (9 - a_1) (9 - a_2) \dots (9 - a_{n-1}) (10 - a_n)$$

y así $s((10^{n+1} - 1)N) = 9n + 9$.

Pero como $9n$ y $9n + 9$ no pueden ser ambos múltiplos de 2003, N no cumple la propiedad deseada.

2. Un argumento alternativo al dado en la parte final de ii. es el siguiente:

Se probó que $s((10^n - 1)N) = 9n$. Entonces, como $(2003,3)=1$, n es múltiplo de 2003. Pero se observa que $11N$ tiene $n + 1$ ó $n + 2$ cifras, y su última cifra es $a_n \neq 0$. Así, por el razonamiento anterior $n + 1$ ó $n + 2$ debe ser también múltiplo de 2003, lo cual es una contradicción.