# VI Olimpiada Matemática de Centroamerica y el Caribe

## Managua, Nicaragua

### 9 de Junio de 2004

**Segundo Día**

**Problema 4**
Se tiene un tablero cuadriculado de $10 \times 10$ casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

**Problema 5**
Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea $P$ el punto sobre $AD$ tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

a) Demostrar que la medida de $\angle BPC = 90°$.

b) Sea $Q$ el punto medio de $BC$ y $R$ el punto de corte de la recta $AD$ y la circunferencia que pasa por los puntos $B$, $A$ y $Q$. Demostrar que los puntos $B$, $P$, $R$ y $C$ están sobre una misma circunferencia.

**Problema 6**
Con perlas de diversos colores se forman collares.
Se dice que un collar es *primo* si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre si.
Sean $n$ y $q$ enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con $n$ perlas, cada una de las cuales tiene uno de $q^n$ colores posibles, es igual a $n$ veces el número de collares primos con $n^2$ perlas, cada una de las cuales tiene uno de $q$ colores posibles.
`Nota:` Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas, y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

Duración de la prueba: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.