

### Problema 130

**Propuesto en la Cátedra de Análisis Matemático IV, Facultad de Ciencias de Madrid, junio de 1965**

Determinar una función holomorfa que verifica las siguientes condiciones:

- 1) está definida y es holomorfa en el primer cuadrante compacto, salvo en el punto  $1+i$ , donde tiene un polo de primer orden con residuo 1.
- 2) sobre el eje real toma valores reales, y sobre el imaginario, imaginarios puros.
- 3) es regular en el punto del infinito, y  $f(\infty)=0$ .

**Solución de Daniel Lasiosa Medarde, Pamplona, España.**

Es conocido que el cociente de dos polinomios de  $z$  (donde  $z$  es la variable compleja) es holomorfo, estando definida en todo punto salvo en sus polos, es decir, en los ceros del denominador. Nos es dado que la función a buscar tiene un polo simple en  $z=1+i$  con residuo 1. Podemos pues buscar la función  $f(z)$  como suma de términos de la forma:

$$f(z) = \frac{1}{z-(1+i)} + \frac{A}{z-(1-i)} + \frac{B}{z-(-1+i)} + \frac{C}{z-(-1-i)},$$

Donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes reales iguales a  $+1$  o  $-1$ . La razón de hacerlo de esta forma es la siguiente: los cuatro sumandos que conforman  $f(z)$  son regulares en el punto del infinito, tomando los cuatro el valor 0. Luego su suma también lo será y tomará también el valor 0, con lo que nos aseguramos el cumplimiento de la condición 3). Al mismo tiempo, los cuatro sumandos son holomorfos salvo en sus polos  $z=\pm 1\pm i$ , que son simples, y el polo en  $z=1+i$  tiene residuo 1, con lo que garantizamos la condición 1). Los tres últimos sumandos se introducen para crear en  $f(z)$  la simetría necesaria para conseguir que tome valores reales sobre la recta real e imaginarios sobre la recta imaginaria, a fin de cumplir la condición 2).

Para que en el eje real la función tome valores reales, debemos exigir que el conjugado de  $f(z)$  sea igual a sí mismo cuando  $z=x$  real, es decir, para todo real  $x$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x-(1-i)} + \frac{A}{x-(1+i)} + \frac{B}{x-(-1-i)} + \frac{C}{x-(-1+i)}.$$

De aquí se deduce necesariamente que  $A=1$ ,  $B=C$ .

Al mismo tiempo, para que en el eje imaginario la función tome valores imaginarios, debemos exigir que el conjugado de  $f(z)$  sea su propio opuesto cuando  $z=iy$  imaginario, es decir, para todo real  $y$ ,

$$f(iy) = -\frac{1}{-iy-(1-i)} - \frac{A}{-iy-(1+i)} - \frac{B}{-iy-(-1-i)} - \frac{C}{-iy-(-1+i)}.$$

De aquí se deduce necesariamente que  $B=1$ ,  $C=A$ . Luego se tiene que podemos tomar

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-(1+i)} + \frac{1}{z-(1-i)} + \frac{1}{z-(-1+i)} + \frac{1}{z-(-1-i)} \\ &= \frac{2z-2}{z^2+2-2z} + \frac{2z+2}{z^2+2+2z} = \frac{4z^3}{z^4+4}. \end{aligned}$$

Obviamente, al ser cociente de dos polinomios, la función es holomorfa en todos sus puntos salvo en sus polos, que son simples, es regular en el infinito, tomando el valor 0, y por construcción tiene un polo en  $z=1+i$  con residuo 1, siendo holomorfa en el resto del primer cuadrante compacto, pues tiene exactamente un polo simple en el interior de cada uno de los cuatro cuadrantes. Además, tanto sobre la recta real como sobre la imaginaria, el denominador toma valores siempre reales y positivos, pues  $j^4=1$ , mientras que el numerador (y por lo tanto la función) toma valores reales sobre la recta real e imaginarios sobre la recta imaginaria.

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

