SOLUCIÓN PROPUESTA

Luis Gómez Sánchez A.
Universidad de Oriente, Venezuela.
lagsa7@hotmail.com
Jirón A. Tovar # 267,
01 La Punta, Callao, PERÚ.

Problema 116 bis (corrección).
Propuesto por Doru Popescu Anastasiu (Slatina, Rumania) y Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, España)
Sean *x* e *y* números reales tales que

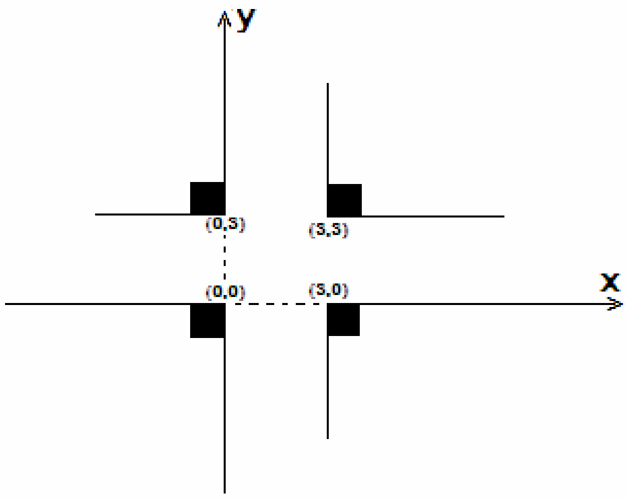
$$\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{y^2-3y}=1.$$

Demostrar que

$$x^2+y^2<2(x+y)+15.$$

SOLUCIÓN.- Como el dominio de definición de $(x^2 - 3x)^{1/2}$ es $\{x \le 0 \text{ ó } x \ge 3\}$, el correspondiente dominio de la función $F(x, y) = (x^2 -3x)^{1/2} + (y^2 - 3y)^{1/2}$, de **R**x**R** en **R**, está dado por la unión de cuadrantes disjuntos $D = \{x \le 0; y \le 0\}$ **U** $\{x \le 0; y \ge 3\}$ **U** $\{x \ge 3; y \le 0\}$ **U** $\{x \ge 3; y \ge 3\}$.

Ahora, como $f(x) = x^2 - 3x$ es, respectivamente, creciente y decreciente a la derecha y a la izquierda del punto $x = 3/2$ que no está en D, los dos radicales que definen F recorren cada uno todos los valores del intervalo cerrado [0, 1]; además, las raíces de $x^2 - 3x = 1$, (que se corresponden claramente con las raíces de $y^2 - 3y = 0$ en la curva $F(x, y) = 1$) son $x_1 = 3.3027$ y $x_2 = -0.3027$, donde se ha aproximado el valor de $\sqrt{13}$. Se deduce que los puntos de **R**x**R** tales que $F(x, y) = 1$ están contenidos en los cuadrados de lado igual a 0.3027, sombreados en la figura y cuya unión notamos D_1. (Es importante aquí observar que D_1 está trivialmente contenido en D pero que la imagen inversa $F^{-1}(\{1\})$ es en rigor más pequeña que D_1; ésta corresponde en verdad a arcos de curva que podrían dibujarse en dicho dominio D_1).



Ahora, haciendo $t^2 = x^2 - 3x$; $u^2 = y^2 - 3y$, se tiene que $x^2 + y^2 = t^2 + u^2 + 3(x + y)$. Entonces el problema equivale a demostrar, simplificación evidente mediante, que $t^2 + u^2 < 15 - (x + y)$ cuando $t + u = 1$ siendo t y u no negativos.

Es obvio en tal caso que $t^2 + u^2 \leq 1$; por otro lado, para todos los puntos (x, y) de $F^{-1}(\{1\})$, el valor de $15 - (x + y)$ será siempre mayor o igual que $15 - Max(x + y)$ con (x, y) ahora sobre toda la zona sombreada D_1 de la figura, lo que está claramente dado por $15 - (3 +\sqrt{13}) = 8.3945 > 1$. Entonces se tiene $1 < 15 - (x + y)$ si $F(x, y) = 1$ de donde $t^2 + u^2 < 15 - (x + y)$ lo que se quería demostrar.

OBSERVACIÓN.- (*Un mejoramiento del enunciado*) El método empleado en la solución, asegura que la cota 15 puede ser mejorada por cualquier positivo menor X tal que $X - (3 + \sqrt{13}) > 1$, es decir tal que $X - 6.6055 > 1$. El mejor entero obtenible, (*trabajando sobre el dominio D_1 adoptado aquí;* véase NOTA debajo) resulta ser entonces el número 8.

NOTA.-Las acotaciones vistas no son lo bastante finas como podrían serlo y ciertamente existen números positivos menores que 8 y que podrían reemplazar al 15 del enunciado; averiguar, por ejemplo, si se puede poner o no el entero 7, sería un muy buen ejercicio para cualquier estudiante interesado en las olimpiadas matemáticas. Tal objetivo podría lograrse tratando de reducir el dominio D_1 (la mejor reducción posible consiste en determinar exactamente $F^{-1}(\{1\})$ y podría notarse para comenzar, que se pueden extraer vecindades adecuadas en varios de los 16 vértices de D_1, en los cuales se tenga $F(x, y) \neq 1$ por lo que, siendo F continua, se tendrá "cerca" de dichos puntos $F(x, y) \neq 1$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI