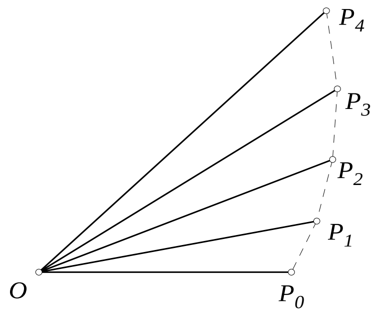
Problema 128.

Se considera un ángulo agudo $\alpha > 0$ dividido en n partes iguales y se toma en un lado del ángulo un punto P_0 cuya distancia al vértice O de sea igual a 1. A partir del punto P_0 se determinan puntos $P_1; P_2; \ldots; P_n$ en los lados sucesivos de los n ángulos formados, tales que todos los segmentos $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ formen un ángulo agudo β con la recta OP_{i-1} y los segmentos OP_i sean sucesivamente crecientes.

Calcular el límite de la longitud del segmento final OP_n, cuando n tiende a infinito.

Solución.

Todos los triángulos $OP_{i-1}P_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son semejantes (tienen iguales dos ángulos) con razón de semejanza $r = \dfrac{OP_i}{OP_{i-1}}$.



Hallaremos r por el teorema de los senos en OP_0P_1:

$$\frac{OP_0}{sen\beta} = \frac{OP_1}{sen\left(180^{\circ} - \beta - \dfrac{\alpha}{n}\right)} \Rightarrow r = \frac{OP_1}{OP_0} = \frac{sen\left(\beta + \dfrac{\alpha}{n}\right)}{sen\beta}$$

entonces tenemos que hallar:

$$\lim_{n\to\infty} OP_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{sen\left(\beta + \dfrac{\alpha}{n}\right)}{sen\beta}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + ctg\,\beta\, sen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)^n$$

el resto es un simple ejercicio de cálculo de límites del tipo 1^{∞}.

$$\lim_{n\to\infty} OP_n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + ctg\,\beta\, sen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{\alpha}{n} + ctg\,\beta\, sen\left(\frac{\alpha}{n}\right) - 1\right)} = e^{\alpha\, ctg\,\beta}$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI