**Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (26)**

**Problemas de la segunda fase de la Olimpiada Británica 2005**

26-2: En el triángulo ABC, $\angle BAC = 120^o$. Las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C cortan a los lados opuestos en D, E y F, respectivamente.
Demostrar que la circunferencia de diámetro EF pasa por D.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo, Galicia, España)

Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de diámetro EF. Entonces D estará en $\mathcal{C}$ si y sólo si $\angle EDF$ es un ángulo inscrito en $\mathcal{C}$ que abarca un diámetro suyo, es decir, si y sólo si $\angle EDF = 90^o$, que equivale a que DEF sea un triángulo rectángulo en D o a que $DE^2 + DF^2 = EF^2$.
Aplicando el teorema del coseno en ADE y en ADF, resulta:
$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos 60^0$ y $DF^2 = AD^2 + AF^2 - 2 \cdot AD \cdot AF \cdot \cos 60^0$, luego
$DE^2 + DF^2 = 2 \cdot AD^2 + AE^2 + AF^2 - AD \cdot (AE + AF)$.
Aplicando el teorema del coseno en AEF, resulta:
$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2 \cdot AE \cdot AF \cdot \cos 120^0$, con lo cual el problema reside en probar la igualdad
$2 \cdot AD^2 - AD \cdot (AE + AF) = AE \cdot AF$. Pero

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin 120^o = [ABC] = [ABD] + [CAD] = \frac{1}{2} \cdot c \cdot AD \cdot \sin 60^o + \frac{1}{2} \cdot b \cdot AD \cdot \sin 60^o \Rightarrow AD = \frac{bc}{b+c}$$ y,

por el teorema de la bisectriz interior,

$$\frac{AE}{b - AE} = \frac{c}{a} \Rightarrow AE = \frac{bc}{c+a} \quad \text{y} \quad \frac{AF}{c - AF} = \frac{b}{a} \Rightarrow AF = \frac{bc}{a+b}.$$

Entonces hay que probar que

$$2\frac{b^2c^2}{(b+c)^2} - \frac{bc}{b+c} bc \frac{2a+b+c}{(c+a)(a+b)} = \frac{b^2c^2}{(c+a)(a+b)}$$

o bien, dividiendo entre $b^2c^2$ y quitando denominadores, que
$2(a+b)(c+a) - (2a+b+c)(b+c) = (b+c)^2$, es decir, que
$2(a^2+bc) = 2(b+c)^2$ o bien que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120^o$,
lo cual es cierto por el teorema del coseno aplicado al triángulo ABC.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI