Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (26)

Problemas de la segunda fase de la Olimpiada Británica 2005

26-3: Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo, Galicia, España)

Hay que demostrar que

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+2\left(\frac{a}{b}\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\frac{a}{b}\right) \geq a\frac{1}{a}+b\frac{1}{b}+c\frac{1}{c}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$, esto es,

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+2\frac{a}{c}+2\frac{b}{a}+2\frac{c}{b} \geq 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ o bien

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+\frac{1}{\frac{a}{b}}+\left(\frac{b}{c}\right)^2-\frac{b}{c}+\frac{1}{\frac{b}{c}}+\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}+\frac{1}{\frac{c}{a}} \geq 3$.

Luego bastará con demostrar que, si x es un número real positivo, se cumple que $x^2-x+\frac{1}{x} \geq 1$ y sumar las tres igualdades resultantes tomando $x=\frac{a}{b}$, $x=\frac{b}{c}$ y $x=\frac{c}{a}$.

Y ello es cierto, dándose además la igualdad sólo y cuando $x=1$ porque, si $x>0$,

$x^2-x+\frac{1}{x}-1=\frac{1}{x}\left(x^3-x^2-x+1\right)=\frac{1}{x}\left[x^2(x-1)-(x-1)\right]=\frac{1}{x}\left(x^2-1\right)(x-1)=\frac{1}{x}(x+1)(x-1)^2$ y $\frac{1}{x}>0$, $x+1>0$ y $(x-1)^2 \geq 0$, con $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

Por tanto, la desigualdad del enunciado está demostrada, y en ella se da la igualdad si y sólo si $\frac{a}{b}=1$, $\frac{b}{c}=1$ y $\frac{c}{a}=1$, es decir, si y sólo si $a=b=c$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: