Solución al Problema 116 bis

Samuel Gómez Moreno,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén.
samuel@ujaen.es

PROBLEMA 116 bis

Sean x e y números reales tales que

$$\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{y^2 - 3y} = 1.$$

Demostrar que

$$x^2 + y^2 < 2(x + y) + 15.$$

SOLUCIÓN

Designemos $a = \sqrt{x^2 - 3x}$. Entonces es claro que $\sqrt{y^2 - 3y} = 1 - a$, que $0 \le a \le 1$ y que $0 \le 1 - a \le 1$. Además

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4a^2}}{2}, \qquad \text{y también} \qquad y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13 - 4a(2 - a)}}{2}.$$

Por tanto, como es inmediato comprobar, obtenemos que

$$x^2 + y^2 - 2(x + y) = \frac{1}{2}\left(8 - 4a(1 - a) \pm \sqrt{13 - 4a(2 - a)} \pm \sqrt{9 + 4a^2}\right). \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que, para $0 \le a \le 1$, se verifican las desigualdades $0 \le a(1 - a) \le 1/4$, $0 \le a(2 - a) \le 1$ y $0 \le a^2 \le 1$, obtenemos de modo inmediato que

$$7 \le 8 - 4a(1 - a) \le 8,\ 3 \le \sqrt{13 - 4a(2 - a)} \le \sqrt{13},\ 3 \le \sqrt{9 + 4a^2} \le \sqrt{13}.$$

Haciendo uso, en la expresión (1), de las tres acotaciones anteriores, obtenemos tres cotas superiores para $x^2 + y^2 - 2(x + y)$: si consideramos los dobles signos que aparecen en (1) ambos positivos, la cota que resulta es

$4+\sqrt{13}$; si consideramos los dobles signos uno positivo y otro negativo, la cota obtenida es $(5+\sqrt{13})/2$; y si los dobles signos los consideramos ambos negativos, la cota obtenida es, entonces, 1. La mayor de las tres cotas es $4+\sqrt{13}$, que verifica $4+\sqrt{13}<7.6056<15$. Por tanto hemos mejorado la desigualdad que pretendíamos probar, ya que hemos establecido que

$$x^2+y^2-2(x+y)\leq 4+\sqrt{13}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: