Problema 127

Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio (Benicasim, España)
Solución de Gabriel Alexander Reyes (San Salvador, El Salvador)

En un triángulo de lados a, b, c y área S, llamamos n-ágono medio, Q_n, a la media aritmética de las áreas de los tres n-ágonos regulares construidos sobre cada lado. Demostrar que

$$S \leq \frac{1}{n} \cdot Q_n \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{n}$$

con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Comenzamos encontrando el área del n-ágono regular construido sobre a. Sea O el centro del polígono y R su circunradio. Entonces el triángulo OBC es isósceles, de lados R, R y a, y claramente su área es una n-ésima parte del área del polígono. Sea h la altura relativa al lado a; entonces es fácil ver que $h = R\cos(\pi/n)$. Luego

$$(OBC) = \frac{a}{2} \cdot R \cos \frac{\pi}{n}$$

Y como por la ley de los senos $a = 2R\,\mathrm{sen}(\pi/n)$ resulta que

$$(OBC) = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2\,\mathrm{sen}(\pi/n)} \cdot \cos \frac{\pi}{n} = \frac{a^2 \cos(\pi/n)}{4\,\mathrm{sen}(\pi/n)} = \frac{a^2}{4\tan(\pi/n)}$$

Por tanto el área del n-ágono regular construido sobre a viene dada por

$$\frac{a^2 n}{4\tan(\pi/n)}$$

Con expresiones análogas para b y c. Así que

$$Q_n = \frac{1}{3}\left[\frac{a^2 n}{4\tan(\pi/n)} + \frac{b^2 n}{4\tan(\pi/n)} + \frac{c^2 n}{4\tan(\pi/n)}\right] = \frac{n(a^2+b^2+c^2)}{12\tan(\pi/n)}$$

De donde el miembro derecho de la desigualdad en cuestión toma la forma

$$\frac{1}{n} \cdot Q_n \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(a^2+b^2+c^2)}{12\tan(\pi/n)} \cdot \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{n} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$$

En consecuencia nuestra desigualdad se reduce a probar que

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

Este es un resultado conocido (desigualdad de Weitzenböck); de hecho apareció como problema 2 en la IMO 1961.

Nuestra prueba se basa en la desigualdad de Mitrinović

$$r \leq \frac{s}{3\sqrt{3}} \leq \frac{R}{2}$$

Donde, como es habitual, R es el circunradio, r es el inradio y s es el semiperímetro del triángulo; y además las igualdades se tienen si y sólo si el triángulo es equilátero. Sólo haremos uso de la cota superior, de la siguiente manera:

$$\frac{s}{3\sqrt{3}} \leq \frac{R}{2} \Leftrightarrow \frac{2s}{3\sqrt{3}} = \frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} \leq R = \frac{abc}{4S} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}S \leq \frac{9abc}{a+b+c}$$

Así que basta con establecer que

$$\frac{9abc}{a+b+c} \leq a^2+b^2+c^2$$

Pero por la desigualdad media aritmética-media geométrica tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2+c^2}{3} &\geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \\ \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{abc} \end{aligned}$$

Y multiplicando estas dos desigualdades obtenemos

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{9} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc$$

Y tenemos el resultado. Observemos que tenemos la igualdad si y sólo si $a = b = c$, esto es, si y sólo si el triángulo es equilátero. ■

Nota. En el libro *Problem-solving strategies* de Arthur Engel (cap. 7, pp. 170 y ss.), se hace un estudio muy completo de la desigualdad de Weitzenböck, presentándose once pruebas diferentes.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: