PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS

Problemas de la Olimpiada Pan Africana 2000

1.Resolver la ecuación trigonométrica

$$\sin^3 x(1+\cot x)+\cos^3 x(1+\tan x) = \cos 2x$$

2.Los polinomios $P_0, P_1, P_2, \cdots$ se definen mediante

$$P_0(x) = x^3+213x^2-67x-2000,$$
$$P_n(x) = P_{n-1}(x-n) \text{ , para } n = 1,2,3,\cdots.$$

¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{21}(x)$?

3.Probar que si

$$\frac{p}{q} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335},$$

siendo p y q números naturales, entonces 2003 divide a p.

4. Sean a, b, c números reales tales que

$$a^2+b^2 = c^2.$$

Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2 = z^2 \\ (x+a)^2+(y+b)^2 = (z+c)^2 \end{array}\right\}$$

5. Desde un punto P, exterior a un círculo, se trazan las tangentes PA y PB. PQR es cualquier secante, estando Q y R sobre la circunferencia. La cuerda BS es paralela a PQR. Demostrar que SA pasa por el punto medio de QR.

6.Una compañía tiene 5 directivos. Las reglas de la compañía requieren que cualquier mayoría (tres o más) de directivos pueda abrir la caja fuerte, pero que ninguna minoría (dos o menos) de directivos la pueda abrir. Se propone equipar a la caja fuerte con 10 cerraduras, de manera que solo se pueda abrir cuando estén disponibles las llaves de todas las cerraduras, y dar a cada directivo un conjunto de llaves de n cerraduras distintas. Encontrar todos los valores de n para los que existe una forma de repartir las llaves de acuerdo con las reglas de la compañía.