

VI Competición Matemática Mediterránea 2003

Problema 2.

Un triángulo  $ABC$  es tal que  $BC = CA + \frac{1}{2}AB$ .

$P$  es el punto del lado  $AB$  tal que  $\frac{BP}{PA} = \frac{1}{3}$ .

Demostrar que  $\angle CAP = 2 \cdot \angle CPA$ .

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Ponemos  $AB = 4x$ ,  $CA = y$  con lo que  $BC = y + 2x$ .

El teorema del coseno aplicado al triángulo  $APC$ , con  $\angle APC = \mathbf{q}$ , da

$$y^2 = (3x)^2 + \overline{CP}^2 - 2 \cdot 3x \cdot \overline{CP} \cdot \cos \mathbf{q} \quad (1)$$

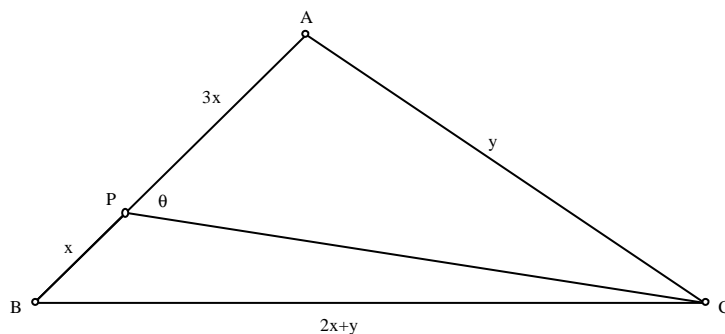
y aplicado al  $\Delta BPC$ ,

$$\begin{aligned} (2x + y)^2 &= x^2 + \overline{CP}^2 - 2 \cdot x \cdot \overline{CP} \cdot \cos(180^\circ - \mathbf{q}) \\ &= x^2 + \overline{CP}^2 + 2 \cdot x \cdot \overline{CP} \cdot \cos \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2)$$

Eliminamos  $\cos \mathbf{q}$  entre (1) y (2) y obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{CP}^2 &= y^2 + 3xy \\ &= y(y + 3x) \\ &= \overline{AC} \cdot (\overline{AC} + \overline{AP}) \end{aligned}$$

Usamos finalmente el hecho que la condición  $\overline{CP}^2 = \overline{AC} \cdot (\overline{AC} + \overline{AP})$  es equivalente a  $\angle CAP = 2 \cdot \angle CPA$  (ver, por ejemplo, Cruix Mathematicorum [1976:74], [1978:278], [1996:265-267]) para obtener el resultado deseado.



# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

