José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.es

Problema 44. *Propuesto por Juan Bosco Romero Maárquez. Ávila, España.*

Sean b, c números reales positivos. Demostrar las desigualdades

1. $\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}} - \sqrt{bc} \leq \dfrac{|b-c|}{\sqrt{2}}$.
2. $\sqrt[4]{b^2+c^2} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Solución por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.

(1) De $(b-c)^2 \geq 0$ se deduce inmediatamente que

$$bc \leq \sqrt{bc\frac{b^2+c^2}{2}}.$$

Multiplicando por 2, sumando $\dfrac{b^2+c^2}{2}$ a ambos miembros de la desigualdad anterior, y reagrupando sus términos convenientemente resulta

$$\frac{b^2+c^2}{2} - 2\sqrt{bc\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)} + bc \leq \frac{(b-c)^2}{2}.$$

Es decir,

$$\left(\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} - \sqrt{bc}\right)^2 \leq \left(\frac{|b-c|}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Ahora, tomando raíces cuadradas la desigualdad queda demostrada.

(2) Sumando b^2+c^2 a ambos miembros de la desigualdad $0 < 4b\sqrt{bc} + 6bc + 4c\sqrt{bc}$ resulta $b^2+c^2 < \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^4$, y hemos terminado.