Solución del problema 43, por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.

Daremos una demostración por métodos geométricos.

a) Consideremos el triángulo rectángulo de lados $a > b \geq c$. Por el teorema de Pitágoras, tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 - 2bc = (b-c)^2 \Leftrightarrow a^2 = (b-c)^2 + 2bc = |b-c|^2 + \left(\sqrt{2bc}\right)^2.$$

Entonces construímos el triángulo rectángulo T' de lados

$$a' = a,\ \ b' = \sqrt{2bc},\ \ c' = |b-c|$$

y de aquí que

$$\begin{aligned} a' \leq b' + c' &\Leftrightarrow a \leq \sqrt{2bc} + |b-c| \Leftrightarrow \sqrt{b^2+c^2} \leq \sqrt{2bc} + |b-c| \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{bc} + \frac{|b-c|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \leq \sqrt{bc} + \frac{|b-c|}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{bc} + \frac{b-c}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} - \sqrt{bc} \leq \frac{b-c}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

b) De manera similar, consideramos la proposición equivalente al teorema de Pitágoras dada por

$$a^2 + \left(\sqrt{2bc}\right)^2 = (b+c)^2,$$

lo que conduce a construir el triángulo rectángulo T" de lados

$$a'' = b + c,\quad b'' = a,\ \ c'' = \sqrt{2bc},$$

y así tenemos

$$b'' < a'' + c'' \Leftrightarrow \sqrt{b^2+c^2} < b + c + \sqrt{2bc} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$$

y extrayendo la raíz cuadrada a los dos miembros se obtiene el resultado.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI