José Luis Díaz–Barrero
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.es

Problema 45. *Propuesto por Juan Bosco Romero Maárquez. Ávila, España.*

Calcular la integral indefinida

$$\int \sqrt{\frac{1+\tan x \tan(x-a)}{1+\tan x \tan a}}\, dx,$$

siendo $0 \leq a \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Solución por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.

Dado que $\tan(x-a) = \dfrac{\tan x - \tan a}{1+\tan x \tan a}$, entonces

$$1+\tan x \tan(x-a) = 1 + \frac{\tan^2 x - \tan x \tan a}{1+\tan x \tan a} = \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x \tan a}.$$

Por tanto,

$$\int \sqrt{\frac{1+\tan x \tan(x-a)}{1+\tan x \tan a}}\, dx = \int \sqrt{\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x \tan a)^2}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x (1+\tan x \tan a)^2}}\, dx = \int \frac{\cos a}{\cos x \cos a + \sin x \sin a}\, dx$$

$$= \int \frac{\cos a}{\cos(x-a)}\, dx = \cos a \ln|\sec(x-a) + \tan(x-a)| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: