<u>Problema 34</u>

(propuesto en la Escuela de Ingenieros Agrónomos, Madrid , 1941)

Dos jugadores, juegan de la siguiente manera: Dado un número N de objetos ($N > 1$), los dos jugadores tienen la facultad de tomar alternativamente 1, 2 ó 3 objetos. El jugador que toma el último objeto pierde. ¿Cuál de los dos jugadores, y en qué casos, tiene una estrategia ganadora?

Llamamos A al jugador que coge primero, y B al que coge segundo. Suponemos que los dos jugadores juegan inteligentemente. Vamos a empezar viendo qué pasa con los números más bajos:

- Si hay una bola, A la coge, y B gana.
- Si hay 2, 3 ó 4 bolas, A coge 1, 2 ó 3 bolas respectivamente para que a B le quede una, por lo que A gana.
- Si hay 5 bolas, A puede coger 1, 2 ó 3 bolas por lo que a B le quedarían 4, 3 ó 2 bolas respectivamente, y estamos en el caso anterior, B gana.
- Si hay 6, 7 ú 8 bolas, A coge 1, 2 ó 3 bolas respectivamente para que a B le quede una, por lo que A gana.
- Si hay 9 bolas, A coge 1, 2 ó 3 bolas, quedando 8, 7 ó 6 bolas respectivamente, por lo que estamos en el caso anterior y B gana.

Parece ser que hay una estrategia ganadora:

Si en una jugada el número de bolas es múltiplo de 4 más 1 ($N=4k+1$), el jugador pierde. Si no es $4k+1$, debe coger bolas tal que el número de bolas para el oponente sí sea de la forma $4k+1$, de tal forma que el oponente pierda.

Para demostrar que dicha estrategia es válida, vamos a dividir los posibles casos en dos: si N es múltiplo de 4 más 1, o que no lo sea.

<u>Caso 1</u>:

Para demostrar que esta regla se cumple, vamos a ver cómo <u>si hay $N=4k+1$ bolas, el jugador A pierde</u>. En efecto, ya que el jugador puede coger 1, 2 ó 3 bolas, la situación es esta:

Nº de bolas antes de mover	Nº de bolas que coge A	Nº de bolas después de mover A	Nº de bolas que debe coger B	Nº de bolas después de mover B
4k+1	1	4k	3	4k-3= 4(k-1)+1= 4m+1
	2	4k-1	2	
	3	4k-1	1	

Y volvemos a la situación inicial en la que A mueve y N es múltiplo de 4 más uno, pero con 4 bolas menos que antes. Como 1 es de la forma $4k+1$ (para $k=0$), y cada dos turnos el número de bolas disminuye en 4, el jugador A acabará irremediablemente en la situación $N=1$ (después de $2*k$ turnos), y perderá.

EL JUGADOR B GANA

<u>Caso 2</u>:

Sin embargo, si el número de bolas no es múltiplo de 4 más uno, tenemos las situaciones:

Nº de bolas antes de mover	Nº de bolas que coge A	Nº de bolas después de mover
4k	3	4k-3= 4(k-1)+1= 4m+1
4k-1	2	
4k-2	1	

Según el apartado anterior, ya que B tiene un número de bolas 4m+1, múltiplo de 4 más 1, B pierde.

EL JUGADOR A GANA

Una vez comprobada la validez (y los resultados) de la estrategia en los dos casos, el juego queda:

- Si el número de bolas inicial es mútiplo de 4 más 1, B gana.
- Si no, A gana.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: