Problema 46.
Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.
Sea ABC un triángulo escaleno cualquiera.

Probar que: $$\left(\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{s}{2.[ABC]}$$
donde *s* es el semiperímetro, y [*ABC*] el área del triángulo.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España.

Del radicando de la primera expresión, obtenemos los siguientes desarrollos:

$$\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{-bc(b+c-a)(b-c)-ac(a+c-b)(c-a)-ab(a+b-c)(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-bc(a+b+c-2a)(b-c)-ac(a+b+c-2b)(c-a)-ab(a+b+c-2c)(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{2abc[b-c+c-a+a-b]-(a+b+c)[bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-(a+b+c)[bc(b-a+a-c)+ac(c-a)+ab(a-b)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-(a+b+c)[(ab-bc)(a-b)+(ac-bc)(c-a)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{-(a+b+c)[b(a-c)(a-b)+c(a-b)(c-a)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-(a+b+c)(a-b)(c-a)(c-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{a+b+c}{abc}$$

En definitiva:
$$\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}=\frac{a+b+c}{abc}$$

Por tanto, hemos de probar la siguiente desigualdad:
$\sqrt{\dfrac{a+b+c}{abc}}<\dfrac{s}{2[ABC]}$, donde 2*s* = a+b+c, y [*ABC*] es el área del triángulo.
Por la fórmula de Herón: [ABC]= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
Así, de esta manera, el problema se reducirá a probar que:

$8\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) < a\cdot b\cdot c$

Para ello, observamos que al ser:
$(s-b) + (s-c) = a$, entonces el producto $(s-b)\cdot(s-c) < a/2\cdot a/2= a^2/4$
Mutatis mutandi, para los segmentos b y c, tendremos que:
$(s-a)\cdot(s-c) < b/2\cdot b/2 = b^2/4$
$(s-a)\cdot(s-b) < c/2\cdot c/2 = c^2/4$
En definitiva:
$(s-b)\cdot(s-c)< a/2\cdot a/2= a^2/4$
$(s-a)\cdot(s-c)< b/2\cdot b/2= b^2/4$
$(s-a)\cdot(s-b)< c/2\cdot c/2= c^2/4$
Realizando el producto de todos los términos, obtenemos que:

$$(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2 < a^2/4\cdot b^2/4\cdot c^2/4$$

$$(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2 < \frac{a^2.b^2.c^2}{64}$$

$$64\cdot(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2 < a^2\cdot b^2\cdot c^2$$

Al extraer raíces cuadradas en ambos términos, resultará que:

$8\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) < a\cdot b\cdot c$, **c.q.d.**

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI