Problema 50.-
Eliminar x, y, z entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} x & +y & +z & =a \\ (y-z)^2 & +(z-x)^2 & +(x-y)^2 & =b \\ x(y-z)^2 & +y(z-x)^2 & +z(x-y)^2 & =c \\ x^2(y-z)^2 & +y^2(z-x)^2 & +z^2(x-y)^2 & =d \end{cases}$$

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España.
Vamos a expresar x,y,z como las soluciones de una ecuación cúbica bajo ciertas condiciones.

1.- De la identidad: $0 = [(y–z)+(z–x)+(x–y)]$
obtenemos al elevarla al cuadrado
$0 = (y–z)^2 + (z–x)^2 + (x–y)^2 + 6(xy+xz+yz) –2(x+y+z)^2$.
Esto es:
$0 = b + 6(xy+xz+yz) –2a^2$, de donde podemos obtener la relación: $xy+xz+yz = 1/6\cdot(2a^2–b)$.

2.- De la identidad: $0 = [x(y–z)+y(z–x)+z(x–y)]$
obtenemos al elevarla al cuadrado
$0 = x^2(y–z)^2 + y^2(z–x)^2 + z^2(x–y)^2 + 6a\ xyz –2(xy+xz+yz)^2$
Esto es:
$0 = d + 6a\ xyz –2\cdot[1/6\cdot(2a^2–b)]^2$.
Luego entonces, tenemos que, si

$a\neq0;\quad xyz = \dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a}$

$a=0;\quad d=\dfrac{b^2}{18}$

3.- Obtengamos un último resultado a partir de la identidad:
$a\cdot b=[x+y+z]\cdot[(y–z)^2 + (z–x)^2 + (x–y)^2]$
Desarrollando este producto concluimos que
$a\cdot b = c + 2\cdot(x^3+ y^3+ z^3) – (xy^2+ xz^2+ yx^2+ yz^2+ zx^2+ zy^2)$
$a\cdot b = c + 2\cdot(x+y+z)^3– 7\cdot(x+y+z)\cdot(xy+xz+yz) + 9xyz$
Al sustituir esta última relación por los valores anteriormente alcanzados llegamos a:

Si $a = 0$, $\quad 0 = c + 9\cdot xyz$; $xyz= –c/9$

Si $a \neq 0$, $\quad a\cdot b= c + 2\cdot a^3– 7/6\cdot a\cdot(2a^2–b)+ 9\cdot\left(\dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a}\right)$;

$2a^2\cdot b –12a\cdot c –b^2 +18d = 0;\quad d=\dfrac{b^2+12ac-2a^2b}{18}$

4.- Resumimos ambos casos en la siguiente tabla:

$a\neq 0$; $b>0$, $d>0$	$a=0$; $b>0$; $d>0$
$d=\dfrac{b^2+12ac-2a^2b}{18}$	$d=\dfrac{b^2}{18}$
$x+y+z = a$	$x+y+z = 0$
$xy + xz + yz = 1/6\cdot(2a^2-b)$.	$xy + xz + yz = -b/6$
$xyz = \dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a}$	$xyz = -c/9$
x, y, z raíces de la ecuación cúbica: $x^3 - a x^2 + 1/6\cdot(2a^2-b)\, x - \dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a} = 0$ **con las condiciones:** $a\neq 0$; $b>0$ y $d=\dfrac{b^2+12ac-2a^2b}{18}>0$	**x, y, z raíces de la ec. cúbica:** $x^3 - b/6\, x + c/9 = 0$ **con las condiciones:** $a=0$; $b>0$ y $d=\dfrac{b^2}{18}$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI