Problemas de Nivel medio y de Olimpiadas (11)

Una selección de problemas propuestos en la 1ª Fase de la XL Olimpiada Matemática Española (Diciembre 2003-enero 2004)

Presentamos a continuación una selección de problemas propuestos en la 1ª Fase de la XL O.M.E. en Valladolid y en Cataluña. Las versiones en catalán de los problemas propuestos en Cataluña se pueden ver en la página web ”Aquí Matemàtiques”.

1.(Cataluña)Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \\ x_2 &= a_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) \\ &\ldots \\ x_n &= a_n - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \end{aligned}$$

2. (Cataluña)Hallar el centro y el radio de la circunferencia que intercepta sobre cada lado de un triángulo dado segmentos iguales al radio.

3.(Cataluña)Efectuar la división entera (es decir, hallar el cociente y el resto) de 2003^{2003} por 2004.

4.(Cataluña) Describir los poliedros convexos de 6 vértices.

5.(Valladolid)El gato de la aldea próxima viene a la nuestra a molestar a los perros. Cada noche, cuando todos los perros están durmiendo, entra en nuestra aldea, empieza a maullar y escapa. Cuando el gato maúlla, todos los perros que están a lo sumo a 90 m de distancia del gato se ponen a ladrar. Nuestra aldea es pequeña, la máxima distancia que hay entre dos perros cualesquiera es 100 metros. ¿Puede el gato empezar a maullar en un punto tal que todos los perros de nuestra aldea empiecen a ladrar al mismo tiempo?

6.(Valladolid)Las casillas de un tablero de ajedrez están numeradas en orden ascendente de izquierda a derecha y de arriba a abajo con los números 1 al 64. En el tablero están colocadas 8 torres de tal modo que no se pueden capturar unas a otras (es decir, no hay dos torres en la misma fila ni en la misma columna. ¿Qué valores puede tomar la suma de números de las casillas en las cuales están colocadas las torres?

7.(Valladolid, propuesto por la RSME)Consideremos los polinomios

$$P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C, \quad Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$$

Supongamos que si a, b, c son las raíces de $P(x)$, las de $Q(x)$ son $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$. Demostrar que $a = b = c$.

8.(Valladolid, propuesto por la RSME)Demostrar que, si $-1 < x < 1, \quad -1 < y < 1,$ entonces se verifica

$$\left| \frac{x-y}{1-xy} \right| \leq \frac{|x| + |y|}{1 + |xy|}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI