Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

# Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

## Número 11 (Enero - Febrero 2003)

**ISSN – 1698-277X**

## Índice



**Editor: Francisco Bellot Rosado**

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 11-Nota





## Presentación del Prof. Antonio Ledesma López

El Prof. Antonio Ledesma López es Catedrático de Matemáticas del I.E.S. nº 1 de Requena (Valencia), y organiza anualmente, con el Colectivo Frontera de Matemáticas, desde hace 16 años, el Open Matemático, una competición de problemas que describe en el artículo que publicamos a continuación. Los problemas propuestos en el Open se recogen anualmente en una publicación que siempre guarda alguna sorpresa... por ejemplo, la del año 2003 tenía como problema inicial el poder abrirla, porque tenía tres orificios hábilmente atados por una cuerda con una bola que no cabía por ninguno de ellos...

Le agradecemos muy sinceramente su colaboración en este número de la Revista Escolar de la O.I.M., que se completa con los Grafitti Matemáticos de la sección Divertimentos Matemáticos.

Francisco Bellot Rosado

Acceder al artículo

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

ISSN 1698-677X

Número 11-Artículo



## El Open Matemático

**Antonio Ledesma López**

Catedrático del IES Nº UNO de Requena (Valencia)
Coordinador del Colectivo Frontera de Matemáticas

El Open Matemático es el nombre popular de un amplio certamen anual de **Popularización de las Matemáticas**, que tiene por actividad principal un **Torneo Abierto de Resolutores de Problemas**. Surgió hace quince años en el IES nº 1 de Requena con los nobles objetivos de:

1. Sacar la Matemática de las aulas y acercarlas al hombre de la calle.
2. Desarrollar la capacidad de resolver problemas; fomentar el gusto por acometerlos.
3. Como plataforma de formación y actualización del profesorado.

La organización corre a cargo del Colectivo Frontera de Matemáticas, grupo que aglutina a profesores de los centros participantes y otras personas allegadas (asociaciones de padres, antiguos alumnos, patrocinadores, editores, diseñadores, periodistas, estudiantes de Matemáticas ...)

Cada edición gira en torno a un **Tema** que sirve, por un lado, como pretexto para divulgar la propia Matemática y, por otro, para mostrar su conexión con otras disciplinas, con otros saberes: las ciencias, la tecnología, las artes, los deportes, la prensa, el humor, la magia, la sociología, la economía, la música .... La próxima edición la dedicaremos a la **Publicidad**.

El **Torneo de Resolutores de Problemas** es un concurso abierto a toda la comunidad educativa, aunque está dirigido fundamentalmente a los alumnos de enseñanza secundaria (ESO, obligatoria, y Bachilleratos y Ciclos Formativos, no obligatoria). Sus **Bases**, en extracto, son:

Consta de ocho jornadas de duración no inferior a una semana. En cada jornada se proponen de dos a cuatro problemas, con un total de 20. Los problemas se expondrán públicamente en un panel. Los participantes dispondrán de toda la semana para entregar sus soluciones en una urna o buzón destinado al efecto, o remitirlas vía fax o e-mail. El Jurado valorará los trabajos y dará una puntuación (0 ó 2 puntos) con la que establecerá una **clasificación general**. Las ideas brillantes o ingeniosas serán tenidas en cuenta para otra clasificación, la del **premio de belleza**.

Son dos meses y medio en los que se respira un sano ambiente matemático. Y no sólo en los centros de enseñanza que cuentan con participantes sino, también, entre familiares, amigos y demás simpatizantes. A ello contribuyen los medios de comunicación locales y regionales.

Entre las **Actividades de Divulgación** destacaríamos:

Fijas en todas las ediciones son:

**DISEÑO DE CARTELES ANUNCIADORES.**

**LA HOJA MATEMÁTICA**.
Periódico mural que, con carácter divulgativo, se publica cada semana coincidiendo con la correspondiente jornada. El contenido puede ser genérico (anecdotario histórico, bibliografía, contradicciones, humor, juegos y pasatiempos, poesías y canciones, trucos numéricos y topológicos ... ) o monográfico alusivo al tema de la presente edición.

**NOTICIAS AL CIERRE I y II**.
Hojas de divulgación con recortes de prensa relacionados con las Matemáticas producidos en el tiempo que va desde que termina una edición del OPEN hasta el inicio de la siguiente (I) . Y noticias de actualidad sobre Matemáticas, Informática, Astronomía, ..., que se producen durante la jornada del OPEN que se está celebrando (II)

**ACTO DE ENTREGA DE PREMIOS**.
Acto académico que suele incluir una conferencia sobre el tema de la presente edición, un concierto, una representación teatral ... y la exposición de las ideas más brillantes de los ganadores.

Y otras, dependiendo del tema de cada edición se hacen:

**EXPOSICIONES ITINERANTES.**
Está prevista : **Dalí matemático, en el centenario de su nacimiento.**

**CONFERENCIAS.**
En preparación : **A la rica geometría publicitaria: anagramas, escudos y logotipos... y La Matemática en los medios de comunicación**.

**FERIA COMARCAL DE LAS MATEMÁTICAS.**

**JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.**

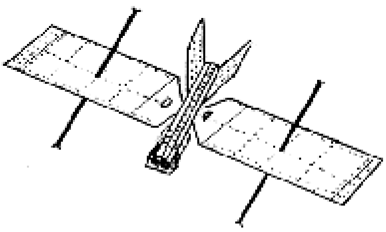
Si eres profesor y estás interesado en participar con tu centro o con tus alumnos, contacta en openmatematico@yahoo.es.

Si eres estudiante, te gusta resolver problemas asiduamente y estás interesado en participar, has de contactar en openmatematico@yahoo.es

Anímate, que empezamos a finales del próximo enero.

Como muestra del tipo de problemas que se proponen, he aquí una pequeña selección: uno de cada edición.

**I - El Tangram. 8ª J. Problema - 19: EL REQUEOSAT ESTROPEADO**



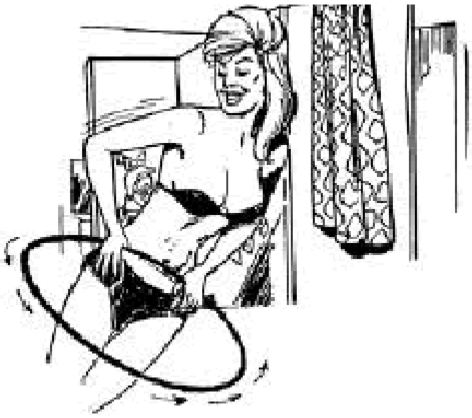
Se ha detectado un problema de interferencias en el transmisor-repetidor del REQUEOSAT-III que produce anomalías en las imágenes que emite la televisión local. Para corregirlo, los técnicos han de construir una antena que cubra toda la zona del espacio que dista dos metros del ala derecha del satélite y tres metros de la correspondiente varilla transversal, y aprovechar la próxima misión espacial para instalarla. ¿Qué forma han de dar a la antena?

**II - Figuras imposibles. 8ª J. Problema - 19: NUDO PENTAGONAL**

Coge una tira de papel estrecha, y haz un nudo simple. Tira con cuidado de los extremos hasta que tengas un pentágono regular plano. ¿Por qué sale un pentágono? ¿Por qué es regular?

**III - Arte Cinético. 6ª J. Problema - 15: LA CHICA DEL HULAHOP**

Imaginemos una chica cuya cintura desnuda sea una circunferencia perfecta. Rodando en torno a su talle, mientras ella permanece inmóvil, tiene un aro (hula-hop) de diámetro doble. Cuando el punto del aro, ahora en contacto con el ombligo de la zagala, retorna por primera vez al mismo lugar, ¿cuánto habrá viajado?



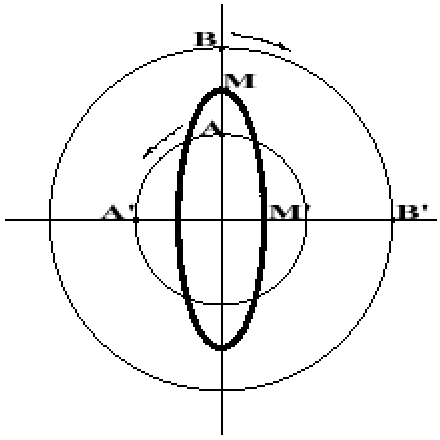
**IV - Papiroflexia y Matemáticas. 4ª J. Problema - 9. EL TAHÚR**

Un tahúr se fabricó tres dados de diferentes colores. El rojo tenía en sus caras, repetidos, los números 2, 4 y 9; el azul los números 3, 5 y 7 duplicados; e igualmente el amarillo, los números 1, 6 y 8.

La suma total es la misma en los tres, pero, aún así, el tahúr cree que si su contrincante es el primero en elegir y lanzar uno de los dados, él puede elegir otro que le dará mayores probabilidades de superar su puntuación. ¡Explica, razonadamente, por qué!

**V - Ajedrez y Matemáticas. 3ª J. Problema - 8: LA CURVA DE ENMEDIO**

Dos puntos viajan sobre un par de circunferencias concéntricas con velocidad constante. Parten en el mismo instante, uno de A y otro de B, y recorren las circunferencias en sentidos distintos, llegando al punto de partida también al mismo tiempo. Como se indica en la figura, mientras los puntos viajeros describen las circunferencias, el punto medio M del segmento que los une describe una elipse.




Dos pilotos de las fuerzas de la ONU destinadas en la antigua Yugoslavia, conocedores de estas cosas, deciden enviar un mensaje de paz al pueblo serbio. Con sus aviones describen en el cielo de Sarajevo dos circunferencias concéntricas. Parten al mismo tiempo de los puntos A y B con velocidades constantes y recorriendo las circunferencias en el mismo sentido, pero el avión que describe la circunferencia exterior llega al punto de partida en la mitad de tiempo que el otro. Hacen que, con humo rojo, aparezca en el cielo la curva descrita por el punto medio del segmento que los une en todo momento de su viaje. ¿Cuál es el mensaje enviado?

**VI - Idiomas y Matemáticas. 1ª J. Problema - 4: CLASIFICANDO NÚMEROS**

Utilizando cierto criterio de clasificación, los números del 0 al 14 están divididos en tres grupos del siguiente modo:

| Grupo - 1 | Grupo – 2 | Grupo – 3 |
|---|---|---|
| 0 3 6 8 9 | 1 4 7 11 14 | 2 5 10 12 13 |

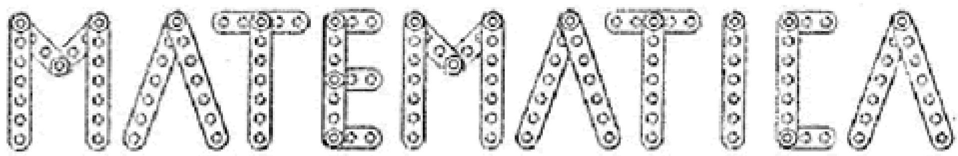
Justifica a qué grupos pertenecen el 15, el 16 y el 17.

**VII - Humor y Matemáticas. 7ª J. Problema - 16: TRAPECIOS**

Dibuja todos los trapecios de lados 1, 2, 3 y 5 unidades de longitud.

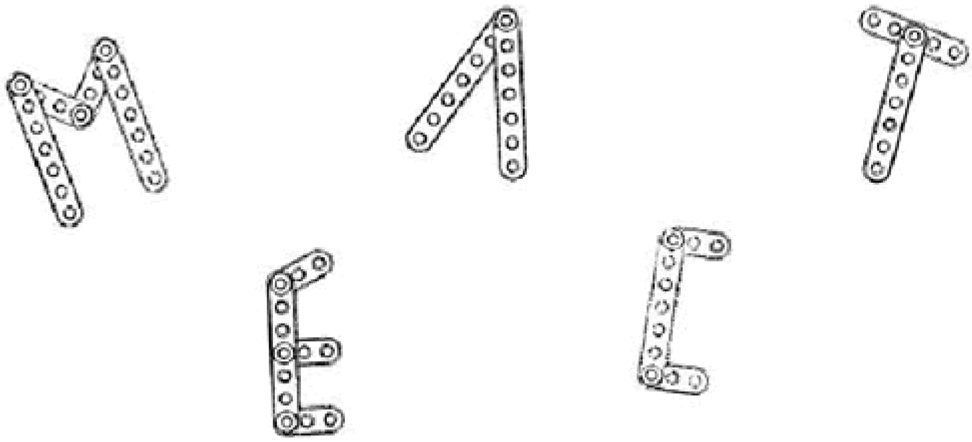
**VIII - Tecnología. 6ª J. Problema - 20: DESPEDIDA**

La cabecera de la Hoja Matemática de este año se confeccionó con varillas de mecano. Observa que las letras de la palabra



no son rígidas, tienen movilidad.

Se te pide que usando el mínimo número de tornillos y varillas (*como referencia asigna a cada tornillo 1 punto y a cada varilla tantos puntos como agujeros tenga: 3, 4, 5 o 7*) hagas rígidas (*no sea posible moverlas por sus articulaciones*) cada una de las letras que la componen:

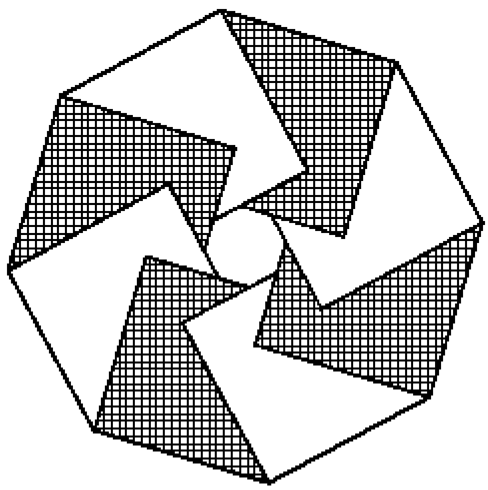


**IX - Fractales. 7ª J. Problema - 18: BALANZA LOCA**

En una balanza de brazos desiguales, si colocamos 15 petit-suisses de 20 gramos en el platillo de la izquierda necesitaremos, para equilibrarla, colocar 3 yogures en el platillo de la derecha. Y si ponemos 4 yogures a la izquierda se deberán colocar 5 petit-suisses a la derecha. ¿Qué pesa un yogur?

**X - Astronomía. 8ª J. Problema - 20: ANAGRAMA**

Los responsables de las diabluras tipo Open se denominan *Colectivo Frontera de Matemáticas* y desde el año pasado exhiben por logotipo estos ochos cuadrados entrelazados en forma octogonal. Se pide la razón de proporcionalidad entre las áreas de los octógonos mayor exterior y menor interior.



**XI - Magia y Matemáticas 7ª J. Problema - 16: FUNDIENDO LA CALCULADORA**

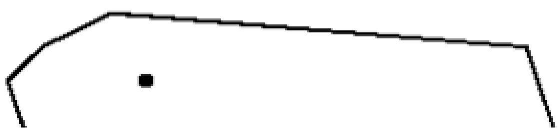
Coge tu calculadora científica y teclea:

$$1 + = 2 + + = = 3 + + + = = = 4 + + \dots \dots = = 100 + + \underbrace{\dots \dots + = =}_{-100--} \underbrace{\dots \dots =}_{-100-}$$

Tal vez te quedes sin pilas, pierdas la paciencia o te desesperes del todo, pero con un poco de reflexión podrás determinar el resultado exacto.

**XII - Año Mundial de las Matemáticas. 3ª J. Temática - Problemas - 8 y 9: CONFLICTO TESTAMENTARIO**

Deseaba Bartholomew que al morir su hacienda se repartiera de forma que a cada uno de sus hijos correspondiera el terreno más próximo al árbol que había plantado de niño. Si el difunto sólo hubiera

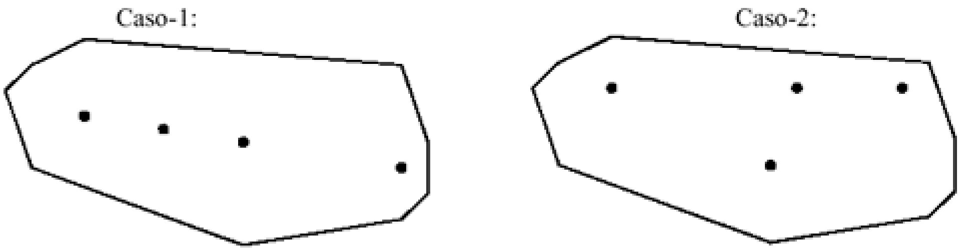


tenido dos hijos, sus últimos deseos serían fáciles de cumplir.

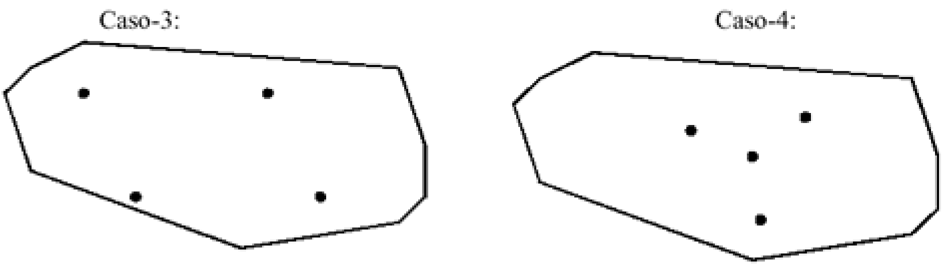
Para ello, el albacea sólo tendría que trazar la mediatriz del segmento que une los dos árboles, y esa sería la frontera entre las dos nuevas parcelas.

Pero Bartholomew dejó cuatro hijos. Cada uno plantó su propio árbol. Y el pobre albacea se las ve negras para hacer cumplir el testamento.
Si estudias el problema en los casos siguientes, podrás ayudar al albacea en el suyo.

**Problema - 8.**




**Problema - 9.**



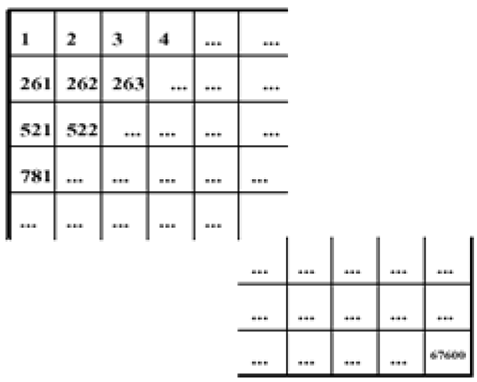

Explica claramente cómo trazas las líneas divisorias y dibújalas con la máxima precisión porque el jurado corregirá con plantilla.

**XIII - Superstición y Matemáticas. 7ª J- Problema - 20: DOSCIENTOS SESENTA**

Trece ediciones del Open Matemático. Veinte problemas por edición. Por tanto, este es el problema número 260.

Imagina un tablero de 260 x 260 casillas numeradas correlativamente de izquierda a derecha y de arriba a abajo, y una chapa perforada con la despedida de la presente edición y que ocupa, exactamente, 19 x 17 casillas del tablero.

La chapa se coloca sobre el tablero, y se desplaza de forma paralela a los lados de la cuadricula, dejando ver entre sus huecos algunos números del tablero.




Si el hueco de la "a" cubre la casilla 2001, ¿cuánto vale la suma de los números que deja ver la "pe"?

**XIV - Economía y Matemáticas. 5ª J- Problema - 14: MERCADO DE VALORES**

Las acciones de la UNITED ESOVIN se han estado vendiendo durante el último año en valores que oscilaban entre 70 y 80 puntos. Hace un año las acciones de ESOVIN valían 3/4 de las de su sempiterna competidora, VINOBACH INC., más antigua en el sector. Ahora VINOBACH se cotiza exactamente 1/8 de punto más bajo que hace un año, pero ESOVIN ha descendido hasta cotizarse a 2/3 del precio de VINOBACH.

Si la unidad mínima utilizada en el mercado de valores es 1/8 de punto, ¿a qué valor se cotizan ambas en la actualidad?

**XV - Música y Matemáticas. 3ª J- Problema - 9: EL CORO DEL INSTITUTO**

Para el ensayo general del concierto de final del segundo trimestre, el director Don Giuseppe Buñolieri quiere colocar a los diez componentes del coro, personas todas de diferente estatura, en dos filas de cinco. Cada corista de la fila de atrás debe ser más alto que el corista que tenga delante. Y además, las estaturas deben ir de menor a mayor de izquierda a derecha.

¿De cuántas formas diferentes puede hacerlo?

| Número 11|
| Principal Olimpiada |
Programación OEI | Principal OEI | Contactar

**Problemas de Nivel medio y de Olimpiadas (11)**

**Una selección de problemas propuestos en la 1ª Fase de la XL Olimpiada Matemática Española (Diciembre 2003-enero 2004)**

Presentamos a continuación una selección de problemas propuestos en la 1ª Fase de la XL O.M.E. en Valladolid y en Cataluña. Las versiones en catalán de los problemas propuestos en Cataluña se pueden ver en la página web ”Aquí Matemàtiques”.

1.(Cataluña)Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \\ x_2 &= a_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) \\ &\dots \\ x_n &= a_n - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \end{aligned}$$

2. (Cataluña)Hallar el centro y el radio de la circunferencia que intercepta sobre cada lado de un triángulo dado segmentos iguales al radio.

3.(Cataluña)Efectuar la división entera (es decir, hallar el cociente y el resto) de $2003^{2003}$ por 2004.

4.(Cataluña) Describir los poliedros convexos de 6 vértices.

5.(Valladolid)El gato de la aldea próxima viene a la nuestra a molestar a los perros. Cada noche, cuando todos los perros están durmiendo, entra en nuestra aldea, empieza a maullar y escapa. Cuando el gato maúlla, todos los perros que están a lo sumo a 90 m de distancia del gato se ponen a ladrar. Nuestra aldea es pequeña, la máxima distancia que hay entre dos perros cualesquiera es 100 metros. ¿Puede el gato empezar a maullar en un punto tal que todos los perros de nuestra aldea empiecen a ladrar al mismo tiempo?

6.(Valladolid)Las casillas de un tablero de ajedrez están numeradas en orden ascendente de izquierda a derecha y de arriba a abajo con los números 1 al 64. En el tablero están colocadas 8 torres de tal modo que no se pueden capturar unas a otras (es decir, no hay dos torres en la misma fila ni en la misma columna. ¿Qué valores puede tomar la suma de números de las casillas en las cuales están colocadas las torres?

7.(Valladolid, propuesto por la RSME)Consideremos los polinomios

$$P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C, \quad Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$$

Supongamos que si $a, b, c$ son las raíces de $P(x)$, las de $Q(x)$ son $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$. Demostrar que $a = b = c$.

8.(Valladolid, propuesto por la RSME)Demostrar que, si $-1 < x < 1, \quad -1 < y < 1,$ entonces se verifica

$$\left| \frac{x-y}{1-xy} \right| \leq \frac{|x| + |y|}{1 + |xy|}.$$

**<u>Problemas para los más jóvenes (11)</u>**

**Una selección de problemas propuestos para la XIV Olimpiada Matemática para alumnos de 2º de E.S.O. (año 2003)**

**La Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas organiza desde hace 14 años esta Competición, cuya última edición se celebró en Calahorra (La Rioja), del 25 al 29 de junio de 2003. Presentamos una selección de problemas que aparecen en el interesante folleto publicado por la Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas "A prima".**

1. **En un cuadrado de vértices A,B,C,D, cuyo lado mide 2 dm, trazamos la diagonal AC, y las circunferencias inscritas en los triángulos ACD y ABC, cuyos centros son respectivamente los puntos E y F. Clasificar el cuadrilátero AFCE y hallar su área.**
2. **Isa invita a 17 amigos a su fiesta de cumpleaños. Asignó a cada invitado un números, desde el 2 hasta el 18, reservándose el 1 para ella misma. Cuando todo el mundo estaba bailando, se dó cuenta de que la suma de los números asignados a cada pareja era cuadrado perfecto. ¿Cuál es el número de la pareja de Isa?(propuesto por Aragón)**
3. **Soy el mayor número natural de todos los que tienen 12 divisores y como únicos divisors primos al 2 y al 3. ¿Cuáles son mis doce divisores? (propuesto por Extremadura)**
4. **Víctor y Alicia intercambian bolas de colores. Una bola blanca la cambian por X bolas azules y una bola azul por X bolas rojas. Víctor tenía 2 bolas blancas, 4 azules y 3 rojas. Al cambiarlas todas a rojas obtiene un total de 73 bolas rojas. ¿Cuál es el valor de X?¿Por cuántas bolas rojas se cambia una blanca?¿Y una azul? (Propuesto por Madrid)**
5. **¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección entre dos cuadrados y dos rectas? ¿Y entre dos triángulos y tres rectas?**

**Problema 34**

(propuesto en la Escuela de Ingenieros Agrónomos, Madrid , 1941)

Dos jugadores, juegan de la siguiente manera: Dado un número N de objetos (N > 1), los dos jugadores tienen la facultad de tomar alternativamente 1, 2 ó 3 objetos. El jugador que toma el último objeto pierde. ¿Cuál de los dos jugadores, y en qué casos, tiene una estrategia ganadora?

--------------------------------------

Llamamos A al jugador que coge primero, y B al que coge segundo. Suponemos que los dos jugadores juegan inteligentemente. Vamos a empezar viendo qué pasa con los números más bajos:

- Si hay una bola, A la coge, y B gana.
- Si hay 2, 3 ó 4 bolas, A coge 1, 2 ó 3 bolas respectivamente para que a B le quede una, por lo que A gana.
- Si hay 5 bolas, A puede coger 1, 2 ó 3 bolas por lo que a B le quedarían 4, 3 ó 2 bolas respectivamente, y estamos en el caso anterior, B gana.
- Si hay 6, 7 ú 8 bolas, A coge 1, 2 ó 3 bolas respectivamente para que a B le quede una, por lo que A gana.
- Si hay 9 bolas, A coge 1, 2 ó 3 bolas, quedando 8, 7 ó 6 bolas respectivamente, por lo que estamos en el caso anterior y B gana.

Parece ser que hay una estrategia ganadora:

Si en una jugada el número de bolas es múltiplo de 4 más 1 (N=4k+1), el jugador pierde. Si no es 4k+1, debe coger bolas tal que el número de bolas para el oponente sí sea de la forma 4k+1, de tal forma que el oponente pierda.

Para demostrar que dicha estrategia es válida, vamos a dividir los posibles casos en dos: si N es múltiplo de 4 más 1, o que no lo sea.

--------------------------------------

Caso 1:

Para demostrar que esta regla se cumple, vamos a ver cómo si hay N=4k+1 bolas, el jugador A pierde. En efecto, ya que el jugador puede coger 1, 2 ó 3 bolas, la situación es esta:

| Nº de bolas antes de mover | Nº de bolas que coge A | Nº de bolas después de mover A | Nº de bolas que debe coger B | Nº de bolas después de mover B |
|---|---|---|---|---|
| 4k+1 | 1 | 4k | 3 | 4k-3= 4(k-1)+1= 4m+1 |
| | 2 | 4k-1 | 2 | |
| | 3 | 4k-1 | 1 | |

Y volvemos a la situación inicial en la que A mueve y N es múltiplo de 4 más uno, pero con 4 bolas menos que antes. Como 1 es de la forma 4k+1 (para k=0), y cada dos turnos el número de bolas disminuye en 4, el jugador A acabará irremediablemente en la situación N=1 (después de 2*k turnos), y perderá.

EL JUGADOR B GANA

--------------------------------------

Caso 2:

Sin embargo, si el número de bolas no es múltiplo de 4 más uno, tenemos las situaciones:

| Nº de bolas antes de mover | Nº de bolas que coge A | Nº de bolas después de mover |
|---|---|---|
| 4k | 3 | 4k-3=<br>4(k-1)+1=<br>4m+1 |
| 4k-1 | 2 | |
| 4k-2 | 1 | |

Según el apartado anterior, ya que B tiene un número de bolas 4m+1, múltiplo de 4 más 1, B pierde.

EL JUGADOR A GANA

--------------------------------------

Una vez comprobada la validez (y los resultados) de la estrategia en los dos casos, el juego queda:

- Si el número de bolas inicial es mútiplo de 4 más 1, B gana.
- Si no, A gana.

**Problema 46**.
Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.
Sea ABC un triángulo escaleno cualquiera.

Probar que: $$\left(\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{s}{2.[ABC]}$$
donde *s* es el semiperímetro, y [*ABC*] el área del triángulo.

## Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España.

Del radicando de la primera expresión, obtenemos los siguientes desarrollos:

$$\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{-bc(b+c-a)(b-c)-ac(a+c-b)(c-a)-ab(a+b-c)(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-bc(a+b+c-2a)(b-c)-ac(a+b+c-2b)(c-a)-ab(a+b+c-2c)(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{2abc[b-c+c-a+a-b]-(a+b+c)[bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-(a+b+c)[bc(b-a+a-c)+ac(c-a)+ab(a-b)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-(a+b+c)[(ab-bc)(a-b)+(ac-bc)(c-a)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{-(a+b+c)[b(a-c)(a-b)+c(a-b)(c-a)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-(a+b+c)(a-b)(c-a)(c-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{a+b+c}{abc}$$

En definitiva:
$$\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}=\frac{a+b+c}{abc}$$

Por tanto, hemos de probar la siguiente desigualdad:
$\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}<\frac{s}{2[ABC]}$, donde 2*s* = a+b+c, y [*ABC*] es el área del triángulo.
Por la fórmula de Herón: [ABC]= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
Así, de esta manera, el problema se reducirá a probar que:

$8\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) < a\cdot b\cdot c$

Para ello, observamos que al ser:
$(s-b) + (s-c) = a$ , entonces el producto $(s-b)\cdot(s-c) < a/2\cdot a/2= a^2/4$
*Mutatis mutandi*, para los segmentos b y c, tendremos que:
$(s-a)\cdot(s-c) < b/2\cdot b/2 = b^2/4$
$(s-a)\cdot(s-b) < c/2\cdot c/2 = c^2/4$
En definitiva:
$(s-b)\cdot(s-c)< a/2\cdot a/2= a^2/4$
$(s-a)\cdot(s-c)< b/2\cdot b/2= b^2/4$
$(s-a)\cdot(s-b)< c/2\cdot c/2= c^2/4$
Realizando el producto de todos los términos, obtenemos que:

$$(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2 < a^2/4\cdot b^2/4\cdot c^2/4$$

$$(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2 < \frac{a^2.b^2.c^2}{64}$$

$$64\cdot(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2< a^2\cdot b^2\cdot c^2$$

Al extraer raíces cuadradas en ambos términos, resultará que:

$8\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) < a\cdot b\cdot c$, **c.q.d.**

Solución del problema 49, por Álvaro Begué Aguado, Nueva York.

Consideremos la sucesión

$$C_n = xa^n + yb^n + zc^n$$

Como $a$, $b$ y $c$ son las raíces del polinomio

$$(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) = \lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (ab + bc + ca)\lambda - abc$$

se tiene que

$$a^{n+3} = (a + b + c)a^{n+2} - (ab + bc + ca)a^{n+1} + (abc)a^n$$

$$b^{n+3} = (a + b + c)c^{n+2} - (ab + bc + ca)b^{n+1} + (abc)b^n$$

$$c^{n+3} = (a + b + c)b^{n+2} - (ab + bc + ca)c^{n+1} + (abc)c^n$$

Multiplicando estas tres ecuaciones por $x$, $y$ y $z$ respectivamente y sumando, obtenemos la relación de recurrencia

$$C_{n+3} = (a + b + c)C_{n+2} - (ab + bc + ca)C_{n+1} + (abc)C_n$$

En particular,

$$C_3 = (a + b + c)C_2 - (ab + bc + ca)C_1 + abcC_0$$

El enunciado del problema estaclece que $C_0 = C_1 = C_2 = 1$, así que ya podemos completar

$$a^3x + b^3y + c^3z = C_3 = (a + b + c) - (ab + bc + ca) + (abc) = 1 - (1 - a)(1 - b)(1 - c)$$

José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.es

**Problema 49.** *Propuesto por el editor.*

Si $x+y+z = ax+by+cz = a^2x+b^2y+c^2z = 1$, demostrar que

$$a^3x+b^3y+c^3z = 1-(1-a)(1-b)(1-c).$$

*Solución por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.*

Aplicando la regla de Crámer al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1, \\ ax+by+cz &= 1, \\ a^2x+b^2y+c^2z &= 1, \end{aligned}$$

se obtiene

$$x = \frac{(1-b)(1-c)}{(c-a)(c-b)}, \quad y = \frac{(1-c)(1-a)}{(a-b)(c-b)}, \quad z = \frac{(1-a)(1-b)}{(a-c)(b-c)}.$$

Por tanto,

$$a^3x+b^3y+c^3z = a^3\frac{(1-b)(1-c)}{(c-a)(c-b)}+b^3\frac{(1-c)(1-a)}{(a-b)(c-b)}+c^3\frac{(1-a)(1-b)}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^3(b-c)(1-b)(1-c)-b^3(a-c)(1-a)(1-c)+c^3(a-b)(1-a)(1-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= a+b+c-(ab+bc+ca)+abc = 1-(1-a)(1-b)(1-c),$$

y hemos terminado.

**Problema 50.-**
Eliminar x, y, z entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = a \\ (y-z)^2 & +(z-x)^2 & +(x-y)^2 & = b \\ x(y-z)^2 & +y(z-x)^2 & +z(x-y)^2 & = c \\ x^2(y-z)^2 & +y^2(z-x)^2 & +z^2(x-y)^2 & = d \end{cases}$$

**Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España.**
Vamos a expresar x,y,z como las soluciones de una ecuación cúbica bajo ciertas condiciones.

**1.-** De la identidad: $0 = [(y–z)+(z–x)+(x–y)]$
obtenemos al elevarla al cuadrado
$0 = (y–z)^2 + (z–x)^2 + (x–y)^2 + 6(xy+xz+yz) –2(x+y+z)^2$.
Esto es:
$0 = b + 6(xy+xz+yz) –2a^2$, de donde podemos obtener la relación: $xy+xz+yz = 1/6\cdot(2a^2–b)$.

**2.-** De la identidad: $0 = [x(y–z)+y(z–x)+z(x–y)]$
obtenemos al elevarla al cuadrado
$0 = x^2(y–z)^2 + y^2(z–x)^2 + z^2(x–y)^2 + 6a\, xyz –2(xy+xz+yz)^2$
Esto es:
$0 = d + 6a\, xyz –2\cdot[1/6\cdot(2a^2–b)]^2$.
Luego entonces, tenemos que, si

$a\neq 0$; $\quad xyz = \dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a}$

$a=0$; $\quad d=\dfrac{b^2}{18}$

**3.-** Obtengamos un último resultado a partir de la identidad:
$a\cdot b=[x+y+z]\cdot[(y–z)^2 + (z–x)^2 + (x–y)^2]$
Desarrollando este producto concluimos que
$a\cdot b = c + 2\cdot(x^3+ y^3+ z^3) – (xy^2+ xz^2+ yx^2+ yz^2+ zx^2+ zy^2)$
$a\cdot b = c + 2\cdot(x+y+z)^3– 7\cdot(x+y+z)\cdot(xy+xz+yz) + 9xyz$
Al sustituir esta última relación por los valores anteriormente alcanzados llegamos a:

Si $a = 0$, $\quad 0 = c + 9\cdot xyz$ ; $xyz= –c/9$

Si $a \neq 0$, $\quad a\cdot b= c + 2\cdot a^3– 7/6\cdot a\cdot(2a^2–b)+ 9\cdot\left(\dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a}\right)$;

$2a^2\cdot b –12a\cdot c –b^2 +18d = 0$; $\quad d=\dfrac{b^2+12ac-2a^2b}{18}$

**4.-** Resumimos ambos casos en la siguiente tabla:

| | |
|---|---|
| $a\neq 0$; $b>0$, $d>0$ | $a=0$; $b>0$; $d>0$ |
| $d=\dfrac{b^2+12ac-2a^2b}{18}$ | $d=\dfrac{b^2}{18}$ |
| $x+y+z = a$ | $x+y+z = 0$ |
| $xy+xz+yz = 1/6\cdot(2a^2-b)$. | $xy+xz+yz = -b/6$ |
| $xyz = \dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a}$ | $xyz = -c/9$ |
| **x, y, z raíces de la ecuación cúbica:** $x^3 - a\,x^2 + 1/6\cdot(2a^2-b)\,x - \dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a} = 0$ **con las condiciones:** $a\neq 0$; $b>0$ y $d=\dfrac{b^2+12ac-2a^2b}{18}>0$ | **x, y, z raíces de la ec. cúbica:** $x^3 - b/6\,x + c/9 = 0$ **con las condiciones:** $a=0$; $b>0$ y $d=\dfrac{b^2}{18}$ |

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 11-Problemas



## Problemas propuestos

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos.

Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaoim@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

### Problema 51

propuesto por José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona, España.(Ligeramente modificado por el editor)

Determinar el mínimo valor de la suma

$$\frac{x}{y+\alpha z}+\frac{y}{z+\alpha x}+\frac{z}{x+\alpha y},$$

siendo x, y, z números reales positivos cualesquiera y a un parámetro real.

### Problema 52

Propuesto por Adrian Muntean, Universidad de Bremen, Alemania.

Para todo $\theta \in ]0,1[$, y $a,b,c \in \mathrm{R}^+$, , demostrar que

$$ab^{\theta}c^{1-\theta} \leq a^2\varepsilon_1 + \varepsilon K_{\varepsilon_1} b^2 + K_{\varepsilon} K_{\varepsilon_1} c^2,$$

donde $K_{\varepsilon}$ y $K_{\varepsilon_1}$ son números positivos suficientemente grandes que dependen de la elección de

$$\varepsilon > 0 \text{ y } \varepsilon_1 > 0.$$

### Problema 53

(Propuesto por el Editor; se dará cuenta de su procedencia al publicar la solución)
Desde el baricentro G del triángulo ABC se trazan perpendiculares GP,GQ,GR sobre los lados BC,CA,AB respectivamente.

Calcular, en función de los elementos del triángulo ABC

a) El área del triángulo PQR.
b)El radio de la circunferencia circunscrita a PQR.
c) La suma de las áreas de los círculos PGQ, QGR y RGP.

**Problema 54**

Propuesto en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, 1941.

Se dibuja sobre una recta *r* un segmento AB y se trazan, en el mismo semiplano, los arcos capaces de 45º y 135º.

Determinar la envolvente de las rectas RS, siendo R y S los puntos de tangencia de las tangentes trazadas a dichos arcos capaces (R sobre el arco capaz de 45º, S sobre el de 135º) desde un punto M que se desplaza sobre la recta *r*.

---

**Problema 55**

Propuesto en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, 1942.

Un cuadrilátero variable ABCD tiene el lado AB fijo; el lado CD constante gira alrededor del punto O de intersección de los lados CD y AB. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de los lados BC y AD.

---

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 11--Divertimentos





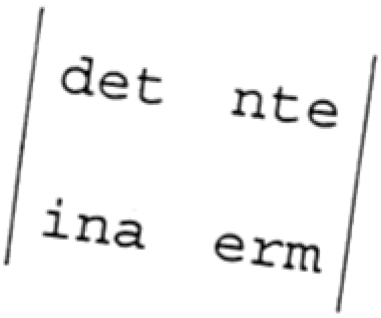
## Graffiti matemático

**Antonio Ledesma López**
Catedrático del IES Nº UNO de Requena (Valencia)
Coordinador del Colectivo Frontera de Matemáticas

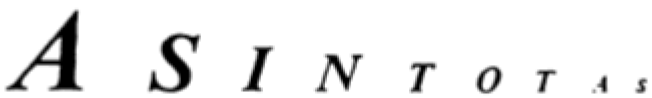
No son frecuentes ya. Los alumnos de enseñanza secundaria que siguen el moderno sistema educativo español han perdido el humor matemático. (el chiste fácil sería; "**si es que alguna vez lo tuvieron**" o "**si es que se puede dar ese tipo de humor**").


No hace muchos años, al dar un paseo por las dependencias del Instituto, aún era fácil encontrar algún graffiti matemático entre las multitemáticas, divertidas, insultantes y, cómo no, escatológicas pintadas que por allí siempre abundan; en los deshojados y orejudos cuadernos, en los folios sueltos que inundan las papeleras (¡y pasillos!), y en los márgenes (¡y portadas!) de los libros abandonados que llegaron al rincón de objetos perdidos de la conserjería.

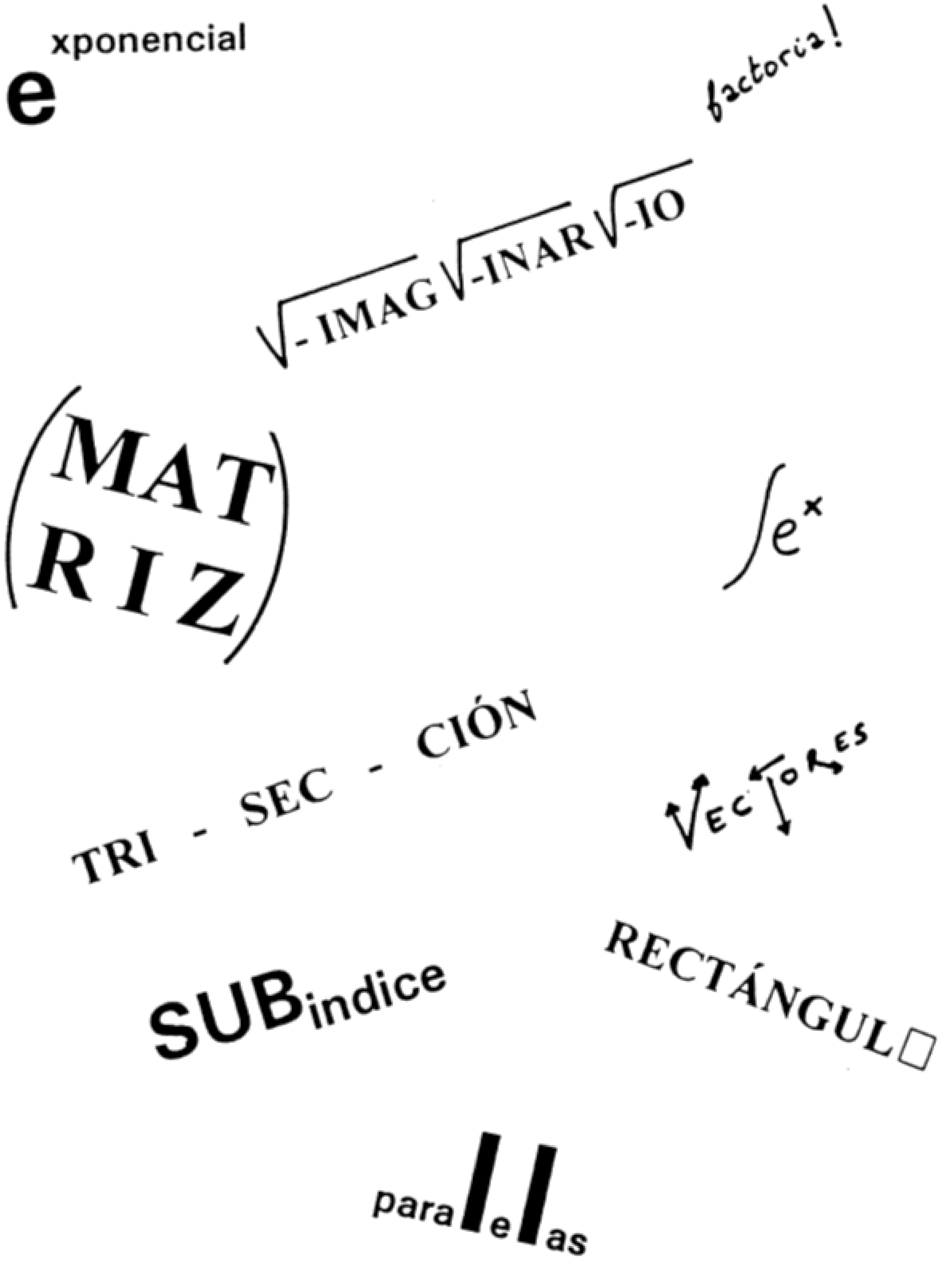
La séptima edición del Open Matemático ya trató el tema del Humor y las Mate-máticas. Con tal motivo, escudriñamos exhaustivamente el patio, las paredes, las puertas de los retretes, las carcomidas estanterías de la biblioteca y de los viejos laboratorios, los vestuarios y las espalderas, las patas del potro y los bajos del plinto del gimnasio, y los añejos pupitres de nuestro vetusto IES nº Uno (este año cumplimos el 75 aniversario de su fundación, ¡y hay cosas que el tiempo no logra borrar!) y rescatamos estas curio-sas reliquias que, sin duda, resultarán familiares y deleitarán a más de uno.




Requena, 22 de Octubre de 2003







exponencial
factorial!
IMAGINARIO
MATRIZ
TRI - SEC - CIÓN
VECTORES
SUBindice
RECTÁNGULO
paralelas

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 11-Páginas web





**Mathematics Resources on the Internet**
**Una página de enlaces con otras de resolución de problemas**

http://www.abc.se/~m9847/matre/problem.html

Se trata de una página sueca (¡en inglés!) de Bruno Kevius, donde se recogen 65 enlaces a otras páginas de interés matemático. Desde aquí se puede acceder, por ejemplo, a la página del Clay Mathematics Institute, con los Problemas del Premio del Milenio; a las Matemáticas del Último teorema de Fermat, de Charles Daney; o a los Problemas de Hilbert, de David E. Joyce.

Dentro de niveles más elementales, es accesible la página del International Mathematical Talent Search, un interesante proyecto internacional para buscar jóvenes talentos matemáticos a través de la resolución de problemas. También hay enlaces a CRUX MATHEMATICORUM o a la International Mathematical Olympiad.

La página forma parte de los clubes ABC (en sueco, con un enlace en inglés), una organización no lucrativa para usuarios del ordenador.

Valladolid, enero de 2004.
Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI