Solución del problema 49, por Álvaro Begué Aguado, Nueva York.

Consideremos la sucesión

$$C_n = xa^n + yb^n + zc^n$$

Como a, b y c son las raíces del polinomio

$$(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) = \lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (ab + bc + ca)\lambda - abc$$

se tiene que

$$a^{n+3} = (a + b + c)a^{n+2} - (ab + bc + ca)a^{n+1} + (abc)a^n$$

$$b^{n+3} = (a + b + c)c^{n+2} - (ab + bc + ca)b^{n+1} + (abc)b^n$$

$$c^{n+3} = (a + b + c)b^{n+2} - (ab + bc + ca)c^{n+1} + (abc)c^n$$

Multiplicando estas tres ecuaciones por x, y y z respectivamente y sumando, obtenemos la relación de recurrencia

$$C_{n+3} = (a + b + c)C_{n+2} - (ab + bc + ca)C_{n+1} + (abc)C_n$$

En particular,

$$C_3 = (a + b + c)C_2 - (ab + bc + ca)C_1 + abcC_0$$

El enunciado del problema estaclece que $C_0 = C_1 = C_2 = 1$, así que ya podemos completar

$$a^3x + b^3y + c^3z = C_3 = (a + b + c) - (ab + bc + ca) + (abc) = 1 - (1 - a)(1 - b)(1 - c)$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI