José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.es

Problema 49. *Propuesto por el editor.*

Si $x+y+z=ax+by+cz=a^2x+b^2y+c^2z=1$, demostrar que

$$a^3x+b^3y+c^3z=1-(1-a)(1-b)(1-c).$$

Solución por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.

Aplicando la regla de Crámer al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ ax+by+cz&=1,\\ a^2x+b^2y+c^2z&=1, \end{aligned}$$

se obtiene

$$x=\frac{(1-b)(1-c)}{(c-a)(c-b)},\quad y=\frac{(1-c)(1-a)}{(a-b)(c-b)},\quad z=\frac{(1-a)(1-b)}{(a-c)(b-c)}.$$

Por tanto,

$$a^3x+b^3y+c^3z=a^3\frac{(1-b)(1-c)}{(c-a)(c-b)}+b^3\frac{(1-c)(1-a)}{(a-b)(c-b)}+c^3\frac{(1-a)(1-b)}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^3(b-c)(1-b)(1-c)-b^3(a-c)(1-a)(1-c)+c^3(a-b)(1-a)(1-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=a+b+c-(ab+bc+ca)+abc=1-(1-a)(1-b)(1-c),$$

y hemos terminado.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI