<u>EJERCICIO Nº 15:</u>

Demostrad que:

$$\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{3\pi}{7}=416$$

<u>Solución:</u>

Para la resolución de este problema he tenido que utilizar:

Números complejos: fórmula de Moivre
Relaciones de Cardano-Vieta

Sea: $A=\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{\cos^4\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^4\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^4\frac{3\pi}{7}}$

$$A=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\right)^4+\left(\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\right)^4+\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\right)^4}{\left(\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\right)^4}$$

Para facilitar operaciones realizamos los cambios:

$$x=\cos\frac{\pi}{7}\qquad y=\cos\frac{2\pi}{7}\qquad z=\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$A=\frac{(xy)^4+(xz)^4+(yz)^4}{(xyz)^4}\qquad (1)$$

Utilizando la fórmula de Moivre con $\alpha=\frac{2\pi}{7}$:

$$e^{\alpha i}=\cos\alpha+isen\alpha\quad\rightarrow\quad e^{7\alpha i}=e^{2\pi i}=1=(\cos\alpha+isen\alpha)^7$$

Tomando sólo la parte real de dicha fórmula nos quedará:

$$1=\binom{7}{0}\cdot\cos^7\alpha-\binom{7}{2}\cdot\cos^5\alpha\cdot sen^2\alpha+\binom{7}{4}\cdot\cos^3\alpha\cdot sen^4\alpha-\binom{7}{6}\cdot\cos\alpha\cdot sen^6\alpha$$

Haciendo $sen^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, obtenemos la expresión en función de cosenos:

$$1=64\cos^7\alpha-112\cos^5\alpha+56\cos^3\alpha-7\cos\alpha\quad\rightarrow\quad\cos\alpha=t$$

$$64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t - 1 = 0$$

Las siete raíces de esta ecuación son los valores de:

$$\cos\frac{2p}{7}, \cos\frac{4p}{7}, \cos\frac{6p}{7}, \cos\frac{8p}{7}, \cos\frac{10p}{7}, \cos\frac{12p}{7}, \cos 2p$$

Si aplicamos la regla de Ruffini para $t_7 = \cos 2p = 1$

	64	0	-112	0	56	0	-7	-1
1		64	64	-48	-48	8	8	1
	64	64	-48	-48	8	8	1	0

Nos queda una ecuación de 6º grado de la forma:

$$64t^6 + 64t^5 - 48t^4 - 48t^3 + 8t^2 + 8t + 1 = 0$$

$$t^6 + t^5 - \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{4}4t^3 + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{64} = 0 \qquad (2)$$

De donde:

$$t_1 = \cos\frac{2p}{7} = y$$

$$t_2 = \cos\frac{4p}{7} = -\cos\frac{3p}{7} = -z$$

$$t_3 = \cos\frac{6p}{7} = -\cos\frac{p}{7} = -x$$

$$t_4 = \cos\frac{8p}{7} = -\cos\frac{p}{7} = -x$$

$$t_5 = \cos\frac{10p}{7} = -\cos\frac{3p}{7} = -z$$

$$t_6 = \cos\frac{12p}{7} = \cos\frac{2p}{7} = y$$

Aplicando a (2) la primera relación de Cardano-Vieta:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = -1 \quad \rightarrow \quad x - y + z = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Aplicando a (2) la sexta relación de Cardano-Vieta:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 = \frac{1}{64} \quad \rightarrow \quad (xyz)^2 = \frac{1}{64} \quad \rightarrow \ xyz = \frac{1}{8}$$

Por tanto, el denominador de A en (1) tiene por valor: $(xyz)^4 = \dfrac{1}{4096}$

El problema reside en calcular el valor de :

$$(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4$$

Aplicando a (2) la quinta relación de Cardano-Vieta:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 + t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_6 + t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_5 \cdot t_6 + t_1 \cdot t_2 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 +$$
$$+ t_1 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 + t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 = -\frac{1}{8}$$

$$x^2yz^2 - x^2y^2z - xy^2z^2 - xy^2z^2 - x^2y^2z + x^2yz^2 = -\frac{1}{8}$$

$$xyz \cdot (xz - xy - yz - yz - xy + xz) = -\frac{1}{8}$$

$$xy - xz + yz = \frac{1}{16xyz} = \frac{1}{16 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Resumiendo, hemos obtenido:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = \dfrac{1}{2} \\[2ex] xy - xz + yz = \dfrac{1}{2} \\[2ex] xyz = \dfrac{1}{8} \end{array}\right\} \quad \text{y}$$

Elevando al cuadrado la segunda de las expresiones:

$$(xy - xz + yz)^2 = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2\left(-x^2yz + xy^2z - xyz^2\right)$$

$$\frac{1}{4} = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2xyz \cdot (-x + y - z)$$

$$\frac{1}{4} = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 = \frac{3}{8}$$

Elevando al cuadrado esta última expresión:

$$\left[(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2\right]^2 = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + 2\left[(xyxz)^2 + (xyyz)^2 + (xzyz)^2\right]$$

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + 2\cdot\left(x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4\right)$$

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + 2\cdot(xyz)^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + \frac{1}{32}\cdot\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \qquad (4)$$

Debemos utilizar y para hallar: $x^2 + y^2 + z^2$

$$(x - y + z)^2 = \frac{1}{4} = x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot(xy - xz + yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{4}$$

Volviendo a (4):

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + \frac{1}{32}\cdot\frac{5}{4}$$

$$(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 = \frac{13}{128}$$

Habíamos hallado: $(xyz)^4 = \dfrac{1}{4096}$

Finalmente, yendo a $A = \dfrac{(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4}{(xyz)^4}$

$$A = \frac{\frac{13}{128}}{\frac{1}{4096}} = \frac{13\cdot 4096}{128} = 416$$

Por tanto, queda demostrado: $\sec^4\dfrac{p}{7} + \sec^4\dfrac{2p}{7} + \sec^4\dfrac{3p}{7} = 416$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: