

EJERCICIO N° 49:

Si $x + y + z = ax + by + cz = a^2x + b^2y + c^2z = 1$ **demuestra que:**

$$a^3x + b^3y + c^3z = 1 - (1-a) \cdot (1-b) \cdot (1-c)$$

Solución:

Se plantea un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = 1 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 \end{array} \right\}$$

Aplicando la regla de Cramer, calculamos en primer lugar el valor del determinante del sistema.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ab^2 + a^2c - a^2b - b^2c - ac^2$$

Para una correcta resolución del problema es necesario factorizar Δ :

$$\Delta = a^2 \cdot (c-b) + a \cdot (b^2 - c^2) + bc^2 - b^2c = (c-b) \cdot [a^2 - (b+c) \cdot a + bc] = (c-b) \cdot (a-b) \cdot (a-c)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ 1 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & 1-c \\ 0 & 1-b^2 & 1-c^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1-b) \cdot (1-c^2) - (1-c) \cdot (1-b^2)}{\Delta}$$

$$x = \frac{(1-b) \cdot (1+c) \cdot (1-c) - (1-c) \cdot (1+b) \cdot (1-b)}{\Delta} = \frac{(1-c) \cdot (1-b) \cdot (1+c-1-b)}{(c-b) \cdot (a-b) \cdot (a-c)}$$

$$x = \frac{(1-b) \cdot (1-c)}{(a-b) \cdot (a-c)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & c \\ a^2 & 1 & c^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 1-c \\ 1-a^2 & 0 & 1-c^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1-c) \cdot (1-a^2) - (1-a) \cdot (1-c^2)}{\Delta}$$

$$y = \frac{(1-c) \cdot (1+a) \cdot (1-a) - (1-a) \cdot (1+c) \cdot (1-c)}{\Delta} = \frac{(1-a) \cdot (1-c) \cdot (1+a-1-c)}{(c-b) \cdot (a-b) \cdot (a-c)}$$

$$y = \frac{(1-a) \cdot (1-c)}{(c-b) \cdot (a-b)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-a & 1-b & 0 \\ 1-a^2 & 1-b^2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1-a) \cdot (1-b^2) - (1-a^2) \cdot (1-b)}{\Delta}$$

$$z = \frac{(1-a) \cdot (1+b) \cdot (1-b) - (1+a) \cdot (1-a) \cdot (1-b)}{\Delta} = \frac{(1-a) \cdot (1-b) \cdot (1+b-1-a)}{(c-b) \cdot (a-b) \cdot (a-c)}$$

$$z = -\frac{(1-a) \cdot (1-b)}{(c-b) \cdot (a-c)}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} a^3 x + b^3 y + c^3 z &= \frac{a^3 \cdot (1-b) \cdot (1-c)}{(a-b) \cdot (a-c)} + \frac{b^3 \cdot (1-a) \cdot (1-c)}{(c-b) \cdot (a-b)} - \frac{c^3 \cdot (1-a) \cdot (1-b)}{(c-b) \cdot (a-c)} = \\ &= \frac{a^3 \cdot (1-b) \cdot (1-c) \cdot (c-b) + b^3 \cdot (1-a) \cdot (1-c) \cdot (a-c) - c^3 \cdot (1-a) \cdot (1-b) \cdot (a-b)}{(a-b) \cdot (a-c) \cdot (c-b)} \end{aligned}$$

$$A = a^3 \cdot (1-b) \cdot (1-c) \cdot (c-b) + b^3 \cdot (1-a) \cdot (1-c) \cdot (a-c) - c^3 \cdot (1-a) \cdot (1-b) \cdot (a-b)$$

$$A = (1-b) \cdot (1-c) \cdot (c-b) \cdot a^3 + [(c-1) \cdot a^2 + (1-c^2) \cdot a + c^2 - c] + [(b-1) \cdot a^2 + (1-b^2) \cdot a + b^2 - b] \cdot c^3$$

Tomando como variable a :

$$\begin{aligned} A &= (1-c) \cdot (1-b) \cdot (c-b) \cdot a^3 + [b^3 \cdot (c-1) - c^3 \cdot (b-1)] \cdot a^2 + \\ &\quad + [b^3 \cdot (1-c^2) - c^3 \cdot (1-b^2)] \cdot a + b^3 \cdot (c^2 - c) - c^3 \cdot (b^2 - b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (1-c) \cdot (1-b) \cdot (c-b) \cdot a^3 + (b^3 c - b^3 - b c^3 + c^3) \cdot a^2 + \\ &\quad + (b^3 - b^3 c^2 - c^3 + b^2 c^3) \cdot a + b^3 c^2 - b^3 c - b^2 c^3 + b c^3 \end{aligned}$$

$$\text{Denotando que } c^3 - b^3 = (c-b) \cdot (c^2 + bc + b^2)$$

$$A = (1-c) \cdot (1-b) \cdot (c-b) \cdot a^3 + [-bc \cdot (c-b) \cdot (c+b) + (c-b) \cdot (c^2 + bc + b^2)] \cdot a^2 + \\ + [(bc)^2 \cdot (c-b) - (c-b) \cdot (c^2 + bc + b^2)] \cdot a - (bc)^2 \cdot (c-b) + bc \cdot (c-b) \cdot (c+b)$$

Factor común $c - b$

$$\frac{A}{c-b} = (1-c) \cdot (1-b) \cdot a^3 + [-bc \cdot (c+b) + c^2 + bc + b^2] \cdot a^2 + \\ + [(bc)^2 - c^2 - bc - b^2] \cdot a + (bc)^2 + bc \cdot (c+b)$$

Si observamos en la expresión algebraica que debemos demostrar no hay denominadores. Eso nos debe hacer pensar que el polinomio

$$P(a) = (1-c) \cdot (1-b) \cdot a^3 + [-bc \cdot (c+b) + c^2 + bc + b^2] \cdot a^2 + [(bc)^2 - c^2 - bc - b^2] \cdot a + (bc)^2 + bc \cdot (c+b)$$

tiene por raíces: $a_1 = c$ y $a_2 = b$.

Por tanto nos aventuramos a aplicar la regla de Ruffini a $P(a)$.

c	1-c-b+bc	-bc ² -b ² c+c ² +bc+ b ²	(bc) ² - c ² -bc- b ²	-(bc) ² +bc ² + b ² c
		c- c ² -bc+ bc ²	c ² -(bc) ² + b ² c	(bc) ² - bc ² - b ² c
	1-c-b+bc	c-b ² c+ b ²	b ² c-bc- b ²	0

Acabamos de demostrar que $a_1 = c$ es solución de $P(a)$

b	1-c-b+bc	c-b ² c+ b ²	b ² c-bc- b ²
		b-bc- b ² + b ² c	b ² +bc- b ² c
	1-c-b+bc	b+c-bc	0

También es solución $a_2 = b$.

Nos queda el factor:

$$(1 - c - b + bc) \cdot a + b + c - bc =$$

El cambio $t = b + c - bc$ facilita las operaciones:

$$(1-t) \cdot a + t = 0 \quad \rightarrow \quad a + \frac{t}{1-t} = 0 \quad \rightarrow \quad a - 1 + \frac{1}{1-t} = 0$$

Deshaciendo el cambio: $a - 1 + \frac{1}{1 - b - c + bc} = 0$, que es la forma más adecuada.

Finalmente, la factorización de $P(a)$ es:

$$P(a) = (a - b) \cdot (a - c) \cdot \left(a - 1 + \frac{1}{1 - b - c + bc} \right)$$

$$\text{Así, } A = (c - b) \cdot (1 - c) \cdot (1 - b) \cdot (a - b) \cdot (a - c) \cdot \left(a - 1 + \frac{1}{1 - b - c + bc} \right)$$

De ese modo:

$$a^3x + b^3y + c^3z = \frac{(c - b) \cdot (1 - c) \cdot (1 - b) \cdot (a - b) \cdot (a - c) \cdot \left(a - 1 + \frac{1}{1 - b - c + bc} \right)}{(c - b) \cdot (a - b) \cdot (a - c)}$$

$$a^3x + b^3y + c^3z = -(1 - c) \cdot (1 - b) \cdot \left(1 - a - \frac{1}{1 - b - c + bc} \right)$$

Rompiendo el paréntesis:

$$a^3x + b^3y + c^3z = -(1 - a) \cdot (1 - b) \cdot (1 - c) + \frac{1 - c - b + bc}{1 - c - b + bc}$$

$$a^3x + b^3y + c^3z = 1 - (1 - a) \cdot (1 - b) \cdot (1 - c) \quad \underline{\underline{\text{c.q.d}}}$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

