EJERCICIO Nº 50:

Eliminad x, y, z en el siguiente sistema algebraico:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a \\ (y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=b \\ x\cdot(y-z)^2+y\cdot(z-x)^2+z\cdot(x-y)^2=c \\ x^2\cdot(y-z)^2+y^2\cdot(z-x)^2+z^2\cdot(x-y)^2=d \end{array}\right\}$$

Solución:

Para resolver el problema he utilizado las fórmulas del cuadrado y el cubo de un polinomio. El proceso es correcto aunque puede haber errores en las operaciones algebraicas, por lo que os pido que lo reviséis.

De la 1ª ecuación:

$$(x+y+z)^2=a^2=x^2+y^2+z^2+2\cdot(xy+xz+yz) \qquad (1)$$

De la 2ª ecuación:

$$y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+x^2+x^2-2xy+y^2=b$$
$$2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\cdot(xy+xz+yz)=b \qquad (2)$$

Por tanto: (1) + (2) $\quad\rightarrow\quad 3\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)=a^2+b$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b}{3}$$

Sustituyendo esta expresión en (1), por ejemplo:

$$a^2=\frac{a^2+b}{3}+2\cdot(xy+xz+yz) \quad\rightarrow\quad xy+xz+yz=\frac{2a^2-b}{6} \qquad (3)$$

Resumiendo:

$$x+y+z=a$$
$$xy+xz+yz=\frac{2a^2-b}{6}$$
$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b}{3}$$

En la 3ª ecuación que nos han dado quedará:

$$x \cdot \left(y^2 - 2yz + z^2\right) + y \cdot \left(z^2 - 2xz + x^2\right) + z \cdot \left(x^2 - 2xy + y^2\right) = c$$

Desarrollando y ordenando convenientemente:

$$x^2 y + x^2 z + xy^2 + xz^2 + y^2 z + yz^2 - 6xyz = c$$

Sabemos que:

$$(x + y + z)^3 = a^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3 \cdot \left(x^2 y + x^2 z + xy^2 + xz^2 + y^2 z + yz^2\right) + 6xyz$$

Sumando estas dos últimas expresiones y operando eficientemente:

$$a^3 + c = x^3 + y^3 + z^3 + 4 \cdot \left[x^2 \cdot (y + z) + y^2 \cdot (x + z) + z^2 \cdot (x + y)\right] \qquad (4)$$

Pero, en la primera ecuación que nos han dado:

$$\begin{aligned} y + z &= a - x \\ x + z &= a - y \\ x + y &= a - z \end{aligned}$$

De ese modo en (4):

$$a^3 + c = x^3 + y^3 + z^3 + 4 \cdot \left[x^2 \cdot (a - x) + y^2 \cdot (a - y) + z^2 \cdot (a - z)\right]$$

$$a^3 + c = x^3 + y^3 + z^3 + 4 \cdot \left(ax^2 - x^3 + ay^2 - y^3 + az^2 - z^3\right)$$

$$a^3 + c = -3 \cdot \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 4a \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Habíamos demostrado que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b}{3}$$

Nos quedará pues:

$$a^3 + c = -3 \cdot \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + \frac{4a \cdot \left(a^2 + b\right)}{3}$$

$$3 \cdot \left(x^3 + y^3 + z^3\right) = \frac{4a \cdot \left(a^2 + b\right)}{3} - a^3 - c$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{a^3 + 4ab - 3c}{9} \qquad (5)$$

Necesitamos hallar el valor del triple producto xyz. Para ello nos apoyamos en una expresión obtenida anteriormente:

$$x^2 y + x^2 z + xy^2 + xz^2 + y^2 z + yz^2 - 6xyz = c$$

$$x^2 \cdot (y+z) + y^2 \cdot (x+z) + z^2 \cdot (x+y) - 6xyz = c$$

$$x^2 \cdot (a-x) + y^2 \cdot (a-y) + z^2 \cdot (a-z) - 6xyz = c$$

$$a \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \left(x^3 + y^3 + z^3\right) - 6xyz = c$$

$$\frac{a \cdot \left(a^2 + b\right)}{3} - \frac{a^3 + 4ab - 3c}{9} - c = 6xyz$$

$$xyz = \frac{2a^3 - ab - 6c}{54} \qquad (6)$$

Resumiendo:

$$\left.\begin{aligned} &x + y + z = a \\ &xy + xz + yz = \frac{2a^2 - b}{6} \\ &xyz = \frac{2a^3 - ab - 6c}{54} \\ &x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b}{3} \\ &x^3 + y^3 + z^3 = \frac{a^3 + 4ab - 3c}{9} \end{aligned}\right\} \text{y}$$

Ya sólo nos queda operar con la cuarta ecuación del enunciado:

$$x^2 \cdot \left(y^2 - 2yz + z^2\right) + y^2 \cdot \left(z^2 - 2xz + x^2\right) + z^2 \cdot \left(x^2 - 2xy + y^2\right) = d$$

$$(xy)^2 - 2x^2 yz + (xz)^2 + (yz)^2 - 2xy^2 z + (xy)^2 + (xz)^2 - 2xyz^2 + (yz)^2 = d$$

Reordenando convenientemente:

$$2 \cdot \left[(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2\right] - 2 \cdot \left[x^2 yz + xy^2 z + xyz^2\right] = d$$

$$2 \cdot \left[(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2\right] - 2 \cdot xyz \cdot (x + y + z) = d \qquad (7)$$

Por tanto, debemos hallar el valor de :

$$M = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2$$

$$(xy + xz + yz)^2 = \left(\frac{2a^2 - b}{6}\right)^2 = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2 \cdot \left[x^2 yz + xy^2 z + xyz^2\right]$$

$$\left(\frac{2a^2 - b}{6}\right)^2 = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2 \cdot xyz \cdot (x + y + z)$$

$$\left(\frac{2a^2 - b}{6}\right)^2 - 2 \cdot xyz \cdot (x + y + z) = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 \qquad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7) tendremos:

$$2 \cdot \left(\frac{2a^2 - b}{6}\right)^2 - 6 \cdot xyz \cdot (x + y + z) = d \qquad (9)$$

Apoyándonos en y eliminamos las variables *x*, *y*, *z*:

$$\frac{(2a^2 - b)^2}{18} - \frac{a \cdot (2a^3 - ab - 6c)}{9} = d$$

$$(2a^2 - b)^2 - 2a \cdot (2a^3 - ab - 6c) - 18d = 0$$

$$4a^4 - 4a^2 b + b^2 - 4a^4 + 2a^2 b + 12ac - 18d = 0$$

La relación pedida es:

$$2a^2 b - b^2 - 12ac + 18d = 0$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI