

Problema 53

Desde el baricentro G del triángulo ABC se trazan perpendiculares GP , GQ , GR sobre los lados BC , CA , AB respectivamente.

Calcular, en función de los elementos del triángulo ABC :

- El área del triángulo PQR .
- El radio de la circunferencia circunscrita a PQR .
- La suma de las áreas de los círculos PGQ , QGR y RGP .

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Sean, en el orden usual,

a , b , c las longitudes de los lados de ΔABC ,

m_a , m_b , m_c las longitudes de las correspondientes medianas

y

h_a , h_b , h_c las de las alturas

Designaremos por $[XYZ]$ el área de un triángulo XYZ .

Si D es el pie de la perpendicular trazada por A sobre BC y M el punto medio de dicho lado, los triángulos ADM y GPM son semejantes; por tanto,

$$\frac{GP}{AD} = \frac{GM}{AM}.$$

Siendo $AD = h_a$ y $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$, por la propiedad del baricentro de trisecar cada mediana, resulta

$$GP = \frac{1}{3}h_a.$$

Análogamente, $GQ = \frac{1}{3}h_b$ y $GR = \frac{1}{3}h_c$.

Pues $\angle GPC$ y $\angle GQC$ son rectos, el cuadrilátero $GPCQ$ es inscriptible en la circunferencia de diámetro GC y, por ser suplementarios los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscriptible, tenemos $\angle PGQ = 180^\circ - C$.

Resulta entonces

$$\begin{aligned} [GPQ] &= \frac{1}{2}GP \cdot GQ \cdot \sin(\angle PGQ) \\ &= \frac{1}{18}h_a h_b \sin C \\ &= \frac{1}{18} \cdot \frac{bc \sin A}{a} \cdot \frac{ca \sin B}{b} \cdot \sin C \\ &= \frac{1}{18}c^2 \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

y, por permutación circular,

$$[GQR] = \frac{1}{18} a^2 \sin A \sin B \sin C, \quad [GRP] = \frac{1}{18} b^2 \sin A \sin B \sin C$$

de donde

$$[PQR] = [GPQ] + [GQR] + [GRP] = \frac{1}{18} (a^2 + b^2 + c^2) \sin A \sin B \sin C \quad (1)$$

Esto contesta a).

b) La circunferencia circunscrita a $\triangle GPQ$ es la que circunscribe el cuadrilátero $GPCQ$ y su diámetro, según se ha visto, es GC . El teorema del seno, aplicado al triángulo GPQ da inmediatamente

$$\begin{aligned} PQ &= GC \cdot \sin(\angle PGQ) \\ &= \frac{2}{3} m_c \sin C \end{aligned}$$

y, por permutación circular,

$$QR = \frac{2}{3} m_a \sin A, \quad RP = \frac{2}{3} m_b \sin B$$

Sustituimos estas expresiones, así como la (1), en la fórmula $\frac{PQ \cdot QR \cdot RP}{4[PQR]}$ que da el valor del radio r de la circunferencia circunscrita a $\triangle PQR$. El resultado es

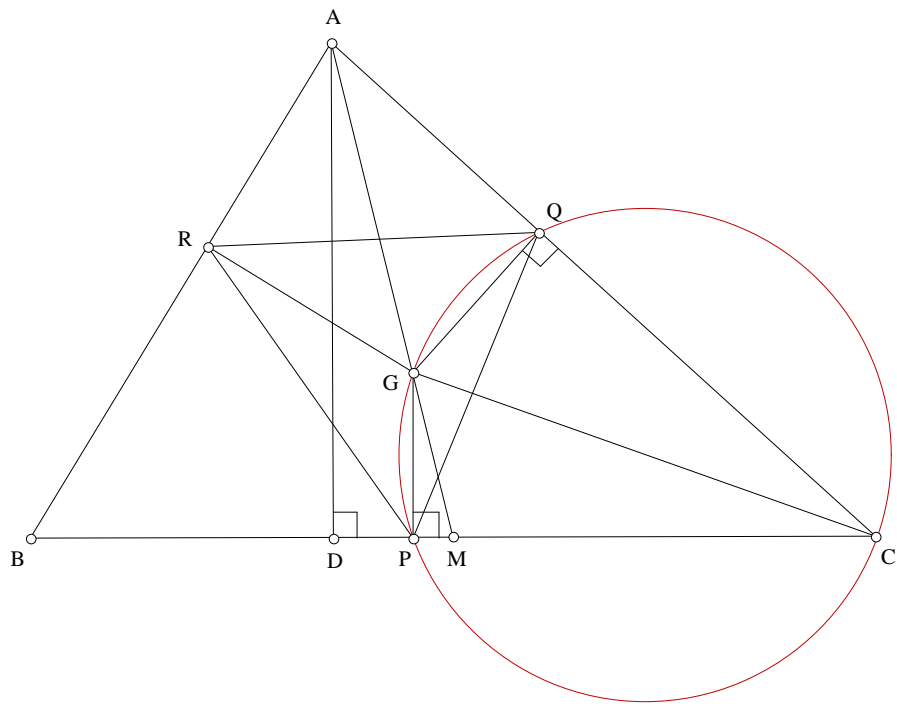
$$\begin{aligned} r &= \frac{4m_a m_b m_c}{3(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{m_a m_b m_c}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} \end{aligned}$$

por la conocida relación $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$.

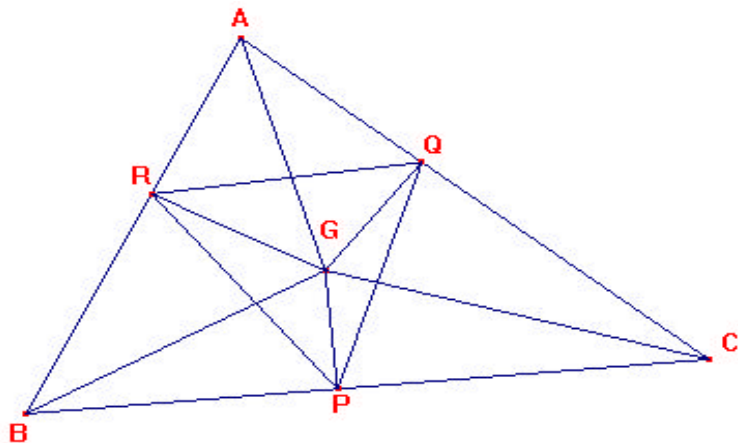
c) Pues los diámetros de los círculos PGQ , QGR y RGP son, respectivamente los segmentos GC , GA y GB , la suma de las áreas que se pide es igual a

$$\frac{P}{9} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

que, expresada en función de los lados del triángulo, se escribe $\frac{P}{12} (a^2 + b^2 + c^2)$.



Solución de Dones Colmenárez (Barquisimeto, Venezuela); esta última da todos los resultados pedidos en función de las longitudes de las medianas del triángulo. Origen del problema : "*Mathematical Problem Papers*", reunidos por el Rev. E.M.Radford, Cambridge 1931



Demostración:

a)-. Como los ángulos $\angle ARG$ y $\angle AQG$ son rectos, entonces el cuadrilátero $\square ARGQ$ es inscriptible en una circunferencia de diámetro AG (circunferencia circunscrita al $\Delta ARQG$) (*)

Aplicando la ley de los senos generalizada en los ΔARG y ΔABC se obtiene:

$$\frac{RQ}{\text{sen}A} = AG \text{ y } \frac{a}{\text{sen}A} = 2R \text{ (aquí R es el circunradio del } \Delta ABC \text{)}$$

Por lo tanto, $RQ = \frac{a \cdot AG}{2R}$

Además, por propiedad de la mediana, $AG = \frac{2}{3} m_a$; en consecuencia, $RG = \frac{a \cdot m_a}{3R}$

Similarmente, $RP = \frac{b \cdot m_b}{3R}$ y $PQ = \frac{c \cdot m_c}{3R}$

Por la formula de Heron

$$[PQR] = \sqrt{s(s-r) \cdot (s-q) \cdot (s-p)}, \text{ donde } t = PQ, q = RP, p = QR \text{ y } s = \frac{r+q+p}{2}$$

Luego,

$$[PQR] = \sqrt{\left(\frac{cm_c + bm_b + am_a}{6R}\right) \left(\frac{am_a + bm_b - cm_c}{6R}\right) \left(\frac{am_a - bm_b + cm_c}{6R}\right) \left(\frac{-am_a + bm_b + cm_c}{6R}\right)}$$

$$= \frac{1}{36R^2} \sqrt{(cm_c + bm_b + am_a)(am_a + bm_b - cm_c)(am_a - bm_b + cm_c)(-am_a + bm_b + cm_c)}$$

b) Como $[PQR] = \frac{rpq}{4R_1}$ donde R_1 es el radio de la circunferencia circunscrita al ΔPQR

entonces:

$$R_1 = \frac{\left(\frac{cm_c}{3R}\right)\left(\frac{bm_b}{3R}\right)\left(\frac{am_a}{3R}\right)}{\frac{1}{36R^2} \sqrt{(cm_c + bm_b + am_a)(am_a + bm_b - cm_c)(am_a - bm_b + cm_c)(-am_a + bm_b + cm_c)}}$$

$$= \frac{4}{3R} \frac{(am_a + bm_b + cm_c)}{\sqrt{(cm_c + bm_b + am_a)(am_a + bm_b - cm_c)(am_a - bm_b + cm_c)(-am_a + bm_b + cm_c)}}$$

c) Sean A_1, A_2 y A_3 las áreas de los círculos **RQG**, **RGP** y **PGQ** respectivamente.

En el desarrollo de la parte **a)**, se probó que la circunferencia circunscrita al triángulo

RQG tiene diámetro $\mathbf{AG} = \frac{2}{3}ma$

Por lo tanto $A_1 = \mathbf{p} \left(\frac{2}{3}ma\right)^2 = \frac{4}{9}\mathbf{p}m_a^2$. Análogicamente

$$A_2 = \frac{4}{9}\mathbf{p} \cdot m_b^2$$

$$A_3 = \frac{4}{9}\mathbf{p} \cdot m_c^2$$

Luego $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{4}{9}\mathbf{p}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

