Problema 55

(Propuesto por la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, 1942).
Un cuadrilátero variable ABCD tiene el lado AB fijo; el lado CD constante gira alrededor del punto O de intersección de los lados CD y AB. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de los lados BC y AD.

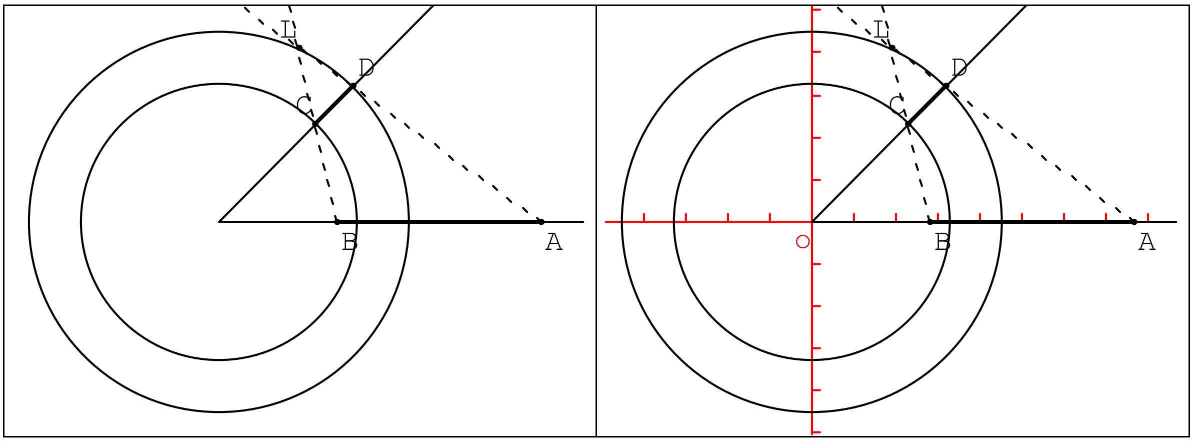
Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

Del análisis del enunciado destacamos la siguiente variación al mismo. El lugar solicitado es equivalente al lugar geométrico de los puntos L del plano, intersección de las rectas AD y BC, donde el segmento AB está dado inicialmente y los puntos C y D son puntos variables sobre dos circunferencias de igual centro O y radios fijos R_1 y R_2, con la condición de que los puntos O, C y D estén siempre alineados al igual que lo están O, A y B.

En concreto, consideramos un sistema de coordenadas cartesianas propiciado por los siguientes elementos.

Eje X: Recta que pasa por el segmento AB.

EjeY: Recta perpendicular al eje X por O, punto intersección de las rectas AB y CD.



Según este sistema de referencia, podemos asignar coordenadas a los extremos del segmento AB de manera que A(a,0), B(b,0).

Sean las dos circunferencias C_1 y C_2, de centro el origen y que pasan por los puntos C y D, puntos de intersección con la semirrecta $y = k{\cdot}x$ $(k \neq 0)$, respectivamente. Sus ecuaciones son:

C_1 : $x^2 + y^2 = R_1^2$

C_2 : $x^2 + y^2 = R_2^2$

De este modo, las coordenadas de los puntos C y D son las siguientes:

$$C\left(\frac{R_1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k.R_1}{\sqrt{1+k^2}}\right),\ D\left(\frac{R_2}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k.R_2}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

Por tanto, las ecuaciones de las rectas AD y BC serán:

AD: $k.R_2.x - (R_2 - a.\sqrt{1+k^2}).y = k.a.R_2$

BC: $k.R_1.x - (R_1 - b.\sqrt{1+k^2}).y = k.b.R_1$

Un poco de cálculo nos da las coordenadas del punto L:

$$L\left(\frac{(a-b).R_1.R_2}{(R_1a - R_2b)\sqrt{1+k^2}} + \frac{a.b.(R_1 - R_2)}{(R_1a - R_2b)}, \frac{(a-b).R_1.R_2.k}{(R_1a - R_2b)\sqrt{1+k^2}}\right)$$

Una vez halladas las coordenadas x e y del punto L nos disponemos a eliminar el parámetro k .
Para ello, señalamos la siguiente relación de interés entre dichas coordenadas:

$$x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}=\frac{(a-b).R_1.R_2}{(R_1a-R_2b)\sqrt{1+k^2}}$$

$$y=\frac{(a-b).R_1.R_2.k}{(R_1a-R_2b)\sqrt{1+k^2}}$$

Por tanto, el valor de *k* vendrá dado por la expresión:

$$k=\frac{y}{x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de *k* encontrado en alguna de las ecuaciones de y (o *x*), obtenemos con un poco de cálculo:

$$\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2=\frac{(a-b)^2.R_1{}^2.R_2{}^2}{(R_1a-R_2b)^2.\left(1+\left(\frac{y}{x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}}\right)^2\right)}$$

$$\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2=\frac{(a-b)^2.R_1{}^2.R_2{}^2.\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2}{(R_1a-R_2b)^2.\left(\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2+y^2\right)}$$

$$\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2+y^2=\frac{(a-b)^2.R_1{}^2.R_2{}^2}{(R_1a-R_2b)^2}$$

Lugar geométrico que representa la ecuación de la circunferencia de centro el punto
$O'\left(\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)},0\right)$ y de radio $R=\left|\frac{(a-b).R_1.R_2}{(R_1a-R_2b)}\right|$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI