

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (12)

Presentamos los problemas de la XX Olimpiada Balcánica de Matemáticas, celebrada a principios de mayo de 2003 en Tirana (Albania).

Problema 1. ¿Existe un conjunto formado por 4004 números naturales no nulos tal que la suma de cualesquiera 2003 de sus elementos no sea divisible por 2003?

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$, y sea D el punto de intersección del lado BC con la tangente en A a la circunferencia circunscrita. Sea E el punto de intersección de la mediatriz de AB con la perpendicular desde B sobre BC . Sea F el punto de intersección de la mediatriz de AC con la perpendicular desde C sobre BC .

Demostrar que D , E y F están alineados.

Problema 3. Encontrar todas las funciones $f : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $f(1) + 1 > 0$.

b) $f(x+y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) - x - y + xy, \forall x, y \in \mathcal{Q}$.

c) $f(x) = 2f(x+1) + x + 2, \forall x \in \mathcal{Q}$.

Problema 4. Sea $ABCD$ un rectángulo de lados de longitudes m, n , dividido en $m \times n$ cuadrados unidad, siendo m y n números naturales impares, primos entre sí. Los puntos de intersección de la diagonal AC con los lados de los cuadrados unidad son A_1, A_2, \dots, A_k , en este orden, con $A_1 = A, A_k = C, k \geq 2$. Demostrar que

$$A_1A_2 - A_2A_3 + A_3A_4 - \dots + (-1)^k A_{k-1}A_k = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{mn}.$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoid/>

Edita:

