PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (12)

Presentamos los problemas propuestos en la VI y VII Olimpiadas Balcánicas Junior, celebradas en Rumania en 2002 y en Turquía en 2003.

El límite superior de edad de los participantes es 15 años. El nivel de dificultad de los problemas propuestos podrá, seguramente, dar una idea de por qué, más adelante, Bulgaria y Rumania están casi siempre entre los cinco primeros países de la Olimpiada Internacional de Matemáticas.

VI Olimpiada Balcánica Junior (2002)

Problema 1.Sea ABC un triángulo isósceles, con AC = BC, y sea P un punto de su circunferencia circunscrita, situado en el arco AB que no contiene a C. Sea D el pie de la perpendicular trazada desde C a la recta PB.

Demostrar que PA + PB = 2PD.

Problema 2. Sean $\mathtt{C}_1$ y $\mathtt{C}_2$ dos circunferencias de radios distintos, que se cortan en los puntos A y B. Sus centros respectivos, $\mathtt{O}_1$ y $\mathtt{O}_2$, están separados por la recta AB. Sean B_1 y B_2 los puntos diametralmente opuestos a B en estas circunferencias. Se consideran los puntos $M_1 \in \mathtt{C}_1$ y $M_2 \in \mathtt{C}_2$ tales que $\widehat{AO_1M_1} = \widehat{AO_2M_2}$, siendo B_1 interior al ángulo $\widehat{AO_1M_1}$, y B (no B_2) interior al ángulo $\widehat{AO_2M_2}$. Sea M el punto medio del segmento B_1B_2.

Demostrar que $\widehat{MM_1B} = \widehat{MM_2B}$.

Problema 3. Encontrar el número natural N que tiene las propiedades siguientes:

i) N tiene exactamente 16 divisores:

$$1 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N.$$

ii) El divisor d_{d_5} es igual a $(d_2 + d_4)d_6$.

Problema 4. Sean a, b, c números reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

VII Olimpiada Balcánica Junior (2003)

Problema 1. El número A tiene 2n cifras, todas ellas iguales a 4, mientras que el número B tiene n cifras, todas iguales a 8. Demostrar que $A + 2B + 4$ es un cuadrado perfecto, cualquiera que sea $n \geq 1$.

Problema 2. En un plano hay n puntos, no alineados tres a tres, con la propiedad siguiente :

Cualquiera que sea la numeración $(1, 2, \cdots, n)$ que se dé a esos puntos, la línea quebrada que los une (en ese orden) no se corta a sí misma.

Encontrar el mayor valor de n para que exista una configuración de n puntos con la anterior propiedad.

Problema 3. El triángulo ABC está inscrito en el círculo k. Sean D, E, F los puntos medios de los arcos BC, CA, AB (que no contienen respectivamente a A,B,C). El segmento DE corta a CB y CA en G y H, respectivamente. El segmento DF corta a BC y BA en los puntos I,J, respectivamente. Sean M y N los puntos medios de GH e IJ, respectivamente.

a) Expresar los ángulos del triángulo DMN en función de los de ABC.

b) Sea Q el centro del círculo circunscrito a DMN y P la intersección de las rectas AD y EF. Demostrar que Q,P,M y N están en una circunferencia.

Problema 4. Demostrar que

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2,$$

cualesquiera que sean los números reales $x, y, z > -1$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: