Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 12 (Marzo - Abril 2003)

ISSN – 1698-277X

Índice

Editor: Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 12 (Marzo - Abril 2003)

ISSN – 1698-277X

Índice

Editor: Francisco Bellot Rosado

Relación del Ortocentro en un Triángulo

Juan Carlos Salazar

Introducción

Estableceremos una relación entre los cuadrados de las distancias desde el ortocentro (H) hacia los vértices (A, B, C) y los cuadrados de los lados (a, b, c) de un triángulo acutángulo (ABC) con el circunradio (R) y el inradio (r_0) de su triángulo órtico (pedal) .

Teorema:

Sea el triángulo acutángulo ABC, de ortocentro H, de circunradio (R), cuyo triángulo órtico (pedal) es H_a, H_b, H_c con inradio (r_0).

Demostrar que:

$$\frac{AH^2 + BH^2 + CH^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{R - r_0}{2R + r_0}$$

Demostración:

Para facilidad de nuestro análisis estableceremos primero las relaciones métricas tomando como referencia al triángulo excentral $I_aI_bI_c$, para luego utilizarlas en el triángulo ABC, aplicando las relaciones métricas para sus elementos análogos respectivos.

Consideramos el triángulo ABC, de incentro I (también ortocentro de su triángulo excentral $I_aI_bI_c$), siendo d la distancia ente su incentro (I) y circuncentro (O), denominamos O_1 al circuncentro del triángulo excentral $I_aI_bI_c$, luego tenemos que O es punto medio de IO_1, recordemos que el circuncentro O del triángulo ABC es también el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo excentral $I_aI_bI_c$.

Aplicando el teorema de Apolonio (conocido como teorema de la Mediana), para el triángulo I_aIO_1:

$$I_aI^2 + I_aO_1^2 = 2I_aO^2 + \frac{IO_1^2}{2} = 2I_aO^2 + 2d^2$$

También por el Teorema de Euler: $d^2 = R^2 - 2Rr$ y $I_aO^2 = R^2 + 2Rr_a$, donde r_a es el radio del excírculo opuesto al vértice A, además se cumple: $I_aO_1 = 2R$ (circunradio del triángulo excentral $I_aI_bI_c$). Entonces:

$$I_aI^2 + 4R^2 = 2(R^2 + 2Rr_a) + 2R^2 - 4Rr = 4R^2 + 4Rr_a - 4Rr$$
$$I_aI^2 = 4R(r_a - r)$$

De manera similar: $I_bI^2 = 4R(r_b - r)$ y $I_cI^2 = 4R(r_c - r)$

Así tenemos que: $I_aI^2 + I_bI^2 + I_cI^2 = 4R(r_a + r_b + r_c - 3r)$

Como: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ (Teorema de Steiner)

Luego:

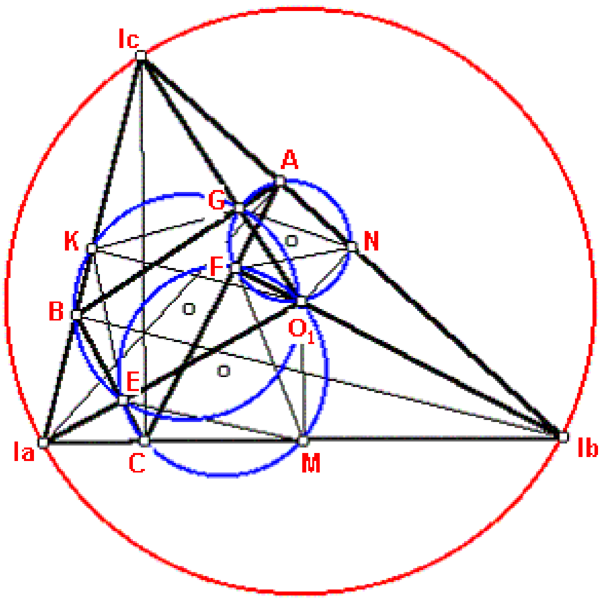
$I_aI^2 + I_bI^2 + I_cI^2 = 8R(2R - r)$

Como I es el ortocentro del triángulo excentral $I_aI_bI_c$, esta relación puede ser aplicada análogamente para el triángulo ABC de ortocentro H, de circunradio R e inradio r_0 de su triángulo órtico, considerando que el circunradio del triángulo ABC es la mitad del circunradio de su triángulo excentral $I_aI_bI_c$.

Por lo tanto para el triángulo ABC:

$AH^2 + BH^2 + CH^2 = 4R(R - r_0)$ ....(I)

Si analizamos el triángulo excentral $I_aI_bI_c$ de circuncentro O_1, donde el triángulo ABC es su triángulo órtico o pedal, donde además tenemos que M, N y K son puntos medios de los lados I_aI_b, I_bI_c e I_aI_c respectivamente. Ver la figura siguiente, que representa una configuración posible.



Tenemos que O_1I_a, O_1I_b y O_1I_c o sus prolongaciones intersecan a los lados BC, AC y AB en los puntos E, F y G, por lo tanto los cuadriláteros NAGF, EBKG y MCEF son cincunscriptibles, cuyos tres circulos se intersecan también en el circuncentro O_1.

Para el vértice I_a, I_aO_1 eje radical de los circuncirculos de los cuadriláteros MCEF y EBKG:

$I_aD.I_aM = I_aD.\frac{I_aI_b}{2} = I_aE.\ I_aO_1$

$I_aD.\dfrac{I_aI_b}{2} = 2R.I_aE$ ……….(1)

Para el vértice I_b, I_bO_1 eje radical de los circuncirculos de los cuadriláteros MCEF y NAGF:

$I_bD.\ I_bM = I_bD.\ \dfrac{I_aI_b}{2} = I_bF.\ I_b\ O_1$

$I_bD.\ \dfrac{I_aI_b}{2} = 2R.\ I_bF$ ……….(2)

(1)+(2):

$$\frac{I_aI_b}{2}(I_aD + I_bD) = \frac{I_aI_b{}^2}{2} = 2R(I_aE + I_bF)$$

$I_aI_b{}^2 = 4R(I_aE + I_bF)$ ....(3)

Similarmente obtenemos:

$I_bI_c{}^2 = 4R(I_cG + I_bF)$ ....(4)

$I_aI_c{}^2 = 4R(I_cG + I_aE)$ ....(5)

A partir de (3), (4) y (5):

$$I_aI_b{}^2 + I_bI_c{}^2 + I_aI_c{}^2 = 8R(I_aE + I_bF + I_cG)$$

Donde: $r_a = I_aE$, $r_b = I_bF$, $r_c = I_cG$, luego:

$$I_aI_b{}^2 + I_bI_c{}^2 + I_aI_c{}^2 = 8R(r_a + r_b + r_c)$$

Además: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ (Teorema de Steiner)

Por lo tanto:

$$I_aI_b{}^2 + I_bI_c{}^2 + I_aI_c{}^2 = 8R(4R + r)$$

Considerando que en esta relación r es el inradio del triángulo ABC (triángulo órtico del triángulo excentral $I_aI_bI_c$), igualmente esta se puede aplicar en forma análoga para el triángulo acutángulo ABC de circunradio R e inradio r_0 de su triángulo órtico.

Luego, para el triángulo ABC:

$a^2 + b^2 + c^2 = 4R(2R + r_0)$ ....(II)

Finalmente, dividiendo (I)/(II):

$$\frac{AH^2 + BH^2 + CH^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{R - r_0}{2R + r_0} \qquad \text{LQQD.}$$

.

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (12)

Presentamos los problemas de la XX Olimpiada Balcánica de Matemáticas, celebrada a principios de mayo de 2003 en Tirana (Albania).

Problema 1.¿Existe un conjunto formado por 4004 números naturales no nulos tal que la suma de cualesquiera 2003 de sus elementos no sea divisible por 2003?

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$, y sea D el punto de intersección del lado BC con la tangente en A a la circunferencia circunscrita. Sea E el punto de intersección de la mediatriz de AB con la perpendicular desde B sobre BC. Sea F el punto de intersección de la mediatriz de AC con la perpendicular desde C sobre BC.

Demostrar que D, E y F están alineados.

Problema 3.Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $f(1) + 1 > 0$.

b)$f(x+y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) - x - y + xy, \quad \forall x,y \in Q$.

c) $f(x) = 2f(x+1) + x + 2, \ \forall x \in Q$.

Problema 4. Sea ABCD un rectángulo de lados de longitudes m, n, dividido en $m \times n$ cuadrados unidad, siendo m y n números naturales impares, primos entre sí. Los puntos de intersección de la diagonal AC con los lados de los cuadrados unidad son $A_1, A_2, \cdots, A_k$, en este orden, con $A_1 = A, A_k = C, k \geq 2$. Demostrar que

$$A_1A_2 - A_2A_3 + A_3A_4 - \cdots + (-1)^k A_{k-1}A_k = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}.$$

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (12)

Presentamos los problemas propuestos en la VI y VII Olimpiadas Balcánicas Junior, celebradas en Rumania en 2002 y en Turquía en 2003.

El límite superior de edad de los participantes es 15 años. El nivel de dificultad de los problemas propuestos podrá, seguramente, dar una idea de por qué, más adelante, Bulgaria y Rumania están casi siempre entre los cinco primeros países de la Olimpiada Internacional de Matemáticas.

VI Olimpiada Balcánica Junior (2002)

Problema 1.Sea ABC un triángulo isósceles, con AC = BC, y sea P un punto de su circunferencia circunscrita, situado en el arco AB que no contiene a C. Sea D el pie de la perpendicular trazada desde C a la recta PB.

Demostrar que PA + PB = 2PD.

Problema 2. Sean $\mathtt{C}_1$ y $\mathtt{C}_2$ dos circunferencias de radios distintos, que se cortan en los puntos A y B. Sus centros respectivos, $\mathtt{O}_1$ y $\mathtt{O}_2$, están separados por la recta AB. Sean B_1 y B_2 los puntos diametralmente opuestos a B en estas circunferencias. Se consideran los puntos $M_1 \in \mathtt{C}_1$ y $M_2 \in \mathtt{C}_2$ tales que $\widehat{AO_1M_1} = \widehat{AO_2M_2}$, siendo B_1 interior al ángulo $\widehat{AO_1M_1}$, y B (no B_2) interior al ángulo $\widehat{AO_2M_2}$. Sea M el punto medio del segmento B_1B_2.

Demostrar que $\widehat{MM_1B} = \widehat{MM_2B}$.

Problema 3. Encontrar el número natural N que tiene las propiedades siguientes:

i) N tiene exactamente 16 divisores:

$$1 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N.$$

ii) El divisor d_{d_5} es igual a $(d_2 + d_4)d_6$.

Problema 4. Sean a, b, c números reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

VII Olimpiada Balcánica Junior (2003)

Problema 1. El número A tiene $2n$ cifras, todas ellas iguales a 4, mientras que el número B tiene n cifras, todas iguales a 8. Demostrar que $A + 2B + 4$ es un cuadrado perfecto, cualquiera que sea $n \geq 1$.

Problema 2. En un plano hay n puntos, no alineados tres a tres, con la propiedad siguiente :

Cualquiera que sea la numeración $(1, 2, \cdots, n)$ que se dé a esos puntos, la línea quebrada que los une (en ese orden) no se corta a sí misma.

Encontrar el mayor valor de n para que exista una configuración de n puntos con la anterior propiedad.

Problema 3. El triángulo ABC está inscrito en el círculo k. Sean D, E, F los puntos medios de los arcos BC, CA, AB (que no contienen respectivamente a A,B,C). El segmento DE corta a CB y CA en G y H, respectivamente. El segmento DF corta a BC y BA en los puntos I,J, respectivamente. Sean M y N los puntos medios de GH e IJ, respectivamente.

a) Expresar los ángulos del triángulo DMN en función de los de ABC.

b) Sea Q el centro del círculo circunscrito a DMN y P la intersección de las rectas AD y EF. Demostrar que Q,P,M y N están en una circunferencia.

Problema 4. Demostrar que

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2,$$

cualesquiera que sean los números reales $x, y, z > -1$.

<u>**EJERCICIO Nº 15:**</u>

Demostrad que:

$$\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{3\pi}{7}=416$$

<u>Solución:</u>

Para la resolución de este problema he tenido que utilizar:

Números complejos: fórmula de Moivre
Relaciones de Cardano-Vieta

Sea: $A=\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{\cos^4\frac{\pi}{7}}+\dfrac{1}{\cos^4\frac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{\cos^4\frac{3\pi}{7}}$

$$A=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\right)^4+\left(\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\right)^4+\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\right)^4}{\left(\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\right)^4}$$

Para facilitar operaciones realizamos los cambios:

$$x=\cos\frac{\pi}{7}\qquad\qquad y=\cos\frac{2\pi}{7}\qquad\qquad z=\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$A=\frac{(xy)^4+(xz)^4+(yz)^4}{(xyz)^4}\qquad\qquad (1)$$

Utilizando la fórmula de Moivre con $\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$:

$$e^{\alpha i}=\cos\alpha+isen\alpha\quad\rightarrow\quad e^{7\alpha i}=e^{2\pi i}=1=(\cos\alpha+isen\alpha)^7$$

Tomando sólo la parte real de dicha fórmula nos quedará:

$$1=\binom{7}{0}\cdot\cos^7\alpha-\binom{7}{2}\cdot\cos^5\alpha\cdot sen^2\alpha+\binom{7}{4}\cdot\cos^3\alpha\cdot sen^4\alpha-\binom{7}{6}\cdot\cos\alpha\cdot sen^6\alpha$$

Haciendo $sen^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, obtenemos la expresión en función de cosenos:

$$1=64\cos^7\alpha-112\cos^5\alpha+56\cos^3\alpha-7\cos\alpha\qquad\rightarrow\quad\cos\alpha=t$$

$$64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t - 1 = 0$$

Las siete raíces de esta ecuación son los valores de:

$$\cos\frac{2p}{7}, \cos\frac{4p}{7}, \cos\frac{6p}{7}, \cos\frac{8p}{7}, \cos\frac{10p}{7}, \cos\frac{12p}{7}, \cos 2p$$

Si aplicamos la regla de Ruffini para $t_7 = \cos 2p = 1$

	64	0	-112	0	56	0	-7	-1
1		64	64	-48	-48	8	8	1
	64	64	-48	-48	8	8	1	0

Nos queda una ecuación de 6º grado de la forma:

$$64t^6 + 64t^5 - 48t^4 - 48t^3 + 8t^2 + 8t + 1 = 0$$

$$t^6 + t^5 - \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{4}4t^3 + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{64} = 0 \qquad (2)$$

De donde:

$$t_1 = \cos\frac{2p}{7} = y$$

$$t_2 = \cos\frac{4p}{7} = -\cos\frac{3p}{7} = -z$$

$$t_3 = \cos\frac{6p}{7} = -\cos\frac{p}{7} = -x$$

$$t_4 = \cos\frac{8p}{7} = -\cos\frac{p}{7} = -x$$

$$t_5 = \cos\frac{10p}{7} = -\cos\frac{3p}{7} = -z$$

$$t_6 = \cos\frac{12p}{7} = \cos\frac{2p}{7} = y$$

Aplicando a (2) la primera relación de Cardano-Vieta:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = -1 \qquad \rightarrow \quad x - y + z = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Aplicando a (2) la sexta relación de Cardano-Vieta:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 = \frac{1}{64} \quad \rightarrow \quad (xyz)^2 = \frac{1}{64} \quad \rightarrow xyz = \frac{1}{8}$$

Por tanto, el denominador de A en (1) tiene por valor: $(xyz)^4 = \dfrac{1}{4096}$

El problema reside en calcular el valor de :

$$(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4$$

Aplicando a (2) la quinta relación de Cardano-Vieta:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 + t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_6 + t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_5 \cdot t_6 + t_1 \cdot t_2 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 +$$
$$+ t_1 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 + t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 = -\frac{1}{8}$$

$$x^2yz^2 - x^2y^2z - xy^2z^2 - xy^2z^2 - x^2y^2z + x^2yz^2 = -\frac{1}{8}$$
$$xyz \cdot (xz - xy - yz - yz - xy + xz) = -\frac{1}{8}$$
$$xy - xz + yz = \frac{1}{16xyz} = \frac{1}{16 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Resumiendo, hemos obtenido:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= \frac{1}{2} \\ xy - xz + yz &= \frac{1}{2} \\ xyz &= \frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \quad \text{y}$$

Elevando al cuadrado la segunda de las expresiones:

$$(xy - xz + yz)^2 = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2\left(-x^2yz + xy^2z - xyz^2\right)$$

$$\frac{1}{4} = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2xyz \cdot (-x + y - z)$$

$$\frac{1}{4} = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 = \frac{3}{8}$$

Elevando al cuadrado esta última expresión:

$$\left[(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2\right]^2 = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + 2\left[(xyxz)^2 + (xyyz)^2 + (xzyz)^2\right]$$

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + 2\cdot\left(x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4\right)$$

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + 2\cdot(xyz)^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + \frac{1}{32}\cdot\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \qquad (4)$$

Debemos utilizar y para hallar: $x^2 + y^2 + z^2$

$$(x - y + z)^2 = \frac{1}{4} = x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot(xy - xz + yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{4}$$

Volviendo a (4):

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + \frac{1}{32}\cdot\frac{5}{4}$$

$$(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 = \frac{13}{128}$$

Habíamos hallado: $(xyz)^4 = \frac{1}{4096}$

Finalmente, yendo a $A = \frac{(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4}{(xyz)^4}$

$$A = \frac{\frac{13}{128}}{\frac{1}{4096}} = \frac{13\cdot 4096}{128} = 416$$

Por tanto, queda demostrado: $\sec^4\frac{p}{7} + \sec^4\frac{2p}{7} + \sec^4\frac{3p}{7} = 416$

EJERCICIO Nº 49:

Si $x+y+z=ax+by+cz=a^2x+b^2y+c^2z=1$ **demuestra que:**

$$a^3x+b^3y+c^3z=1-(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)$$

Solución:

Se plantea un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=1 \\ a^2x+b^2y+c^2z=1 \end{array}\right\}$$

Aplicando la regla de Cramer, calculamos en primer lugar el valor del determinante del sistema.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=bc^2+ab^2+a^2c-a^2b-b^2c-ac^2$$

Para una correcta resolución del problema es necesario factorizar Δ:

$$\Delta=a^2\cdot(c-b)+a\cdot\left(b^2-c^2\right)+bc^2-b^2c=(c-b)\cdot\left[a^2-(b+c)\cdot a+bc\right]=(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ 1 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & 1-c \\ 0 & 1-b^2 & 1-c^2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1-b)\cdot\left(1-c^2\right)-(1-c)\cdot\left(1-b^2\right)}{\Delta}$$

$$x=\frac{(1-b)\cdot(1+c)\cdot(1-c)-(1-c)\cdot(1+b)\cdot(1-b)}{\Delta}=\frac{(1-c)\cdot(1-b)\cdot(1+c-1-b)}{(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$x=\frac{(1-b)\cdot(1-c)}{(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & c \\ a^2 & 1 & c^2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 1-c \\ 1-a^2 & 0 & 1-c^2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1-c)\cdot\left(1-a^2\right)-(1-a)\cdot\left(1-c^2\right)}{\Delta}$$

$$y=\frac{(1-c)\cdot(1+a)\cdot(1-a)-(1-a)\cdot(1+c)\cdot(1-c)}{\Delta}=\frac{(1-a)\cdot(1-c)\cdot(1+a-1-c)}{(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$y=\frac{(1-a)\cdot(1-c)}{(c-b)\cdot(a-b)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&1\\a^2&b^2&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1-a&1-b&0\\1-a^2&1-b^2&0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1-a)\cdot\left(1-b^2\right)-\left(1-a^2\right)\cdot(1-b)}{\Delta}$$

$$z=\frac{(1-a)\cdot(1+b)\cdot(1-b)-(1+a)\cdot(1-a)\cdot(1-b)}{\Delta}=\frac{(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1+b-1-a)}{(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$z=-\frac{(1-a)\cdot(1-b)}{(c-b)\cdot(a-c)}$$

Por tanto:

$$a^3x+b^3y+c^3z=\frac{a^3\cdot(1-b)\cdot(1-c)}{(a-b)\cdot(a-c)}+\frac{b^3\cdot(1-a)\cdot(1-c)}{(c-b)\cdot(a-b)}-\frac{c^3\cdot(1-a)\cdot(1-b)}{(c-b)\cdot(a-c)}=$$

$$=\frac{a^3\cdot(1-b)\cdot(1-c)\cdot(c-b)+b^3\cdot(1-a)\cdot(1-c)\cdot(a-c)-c^3\cdot(1-a)\cdot(1-b)\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot(a-c)\cdot(c-b)}$$

$$A=a^3\cdot(1-b)\cdot(1-c)\cdot(c-b)+b^3\cdot(1-a)\cdot(1-c)\cdot(a-c)-c^3\cdot(1-a)\cdot(1-b)\cdot(a-b)$$

$$A=(1-b)\cdot(1-c)\cdot(c-b)\cdot a^3+\left[(c-1)\cdot a^2+\left(1-c^2\right)\cdot a+c^2-c\right]+\left[(b-1)\cdot a^2+\left(1-b^2\right)\cdot a+b^2-b\right]\cdot c^3$$

Tomando como variable ***a***:

$$A=(1-c)\cdot(1-b)\cdot(c-b)\cdot a^3+\left[b^3\cdot(c-1)-c^3\cdot(b-1)\right]\cdot a^2+$$

$$+\left[b^3\cdot\left(1-c^2\right)-c^3\cdot\left(1-b^2\right)\right]\cdot a+b^3\cdot\left(c^2-c\right)-c^3\cdot\left(b^2-b\right)$$

$$A=(1-c)\cdot(1-b)\cdot(c-b)\cdot a^3+\left(b^3c-b^3-bc^3+c^3\right)\cdot a^2+$$

$$+\left(b^3-b^3c^2-c^3+b^2c^3\right)\cdot a+b^3c^2-b^3c-b^2c^3+bc^3$$

Denotando que $c^3-b^3=(c-b)\cdot\left(c^2+bc+b^2\right)$

$$A=(1-c)\cdot(1-b)\cdot(c-b)\cdot a^3+\left[-bc\cdot(c-b)\cdot(c+b)+(c-b)\cdot\left(c^2+bc+b^2\right)\right]\cdot a^2+$$

$$+\left[(bc)^2\cdot(c-b)-(c-b)\cdot\left(c^2+bc+b^2\right)\right]\cdot a-(bc)^2\cdot(c-b)+bc\cdot(c-b)\cdot(c+b)$$

Factor común $c-b$

$$\frac{A}{c-b}=(1-c)\cdot(1-b)\cdot a^3+\left[-bc\cdot(c+b)+c^2+bc+b^2\right]\cdot a^2+$$
$$+\left[(bc)^2-c^2-bc-b^2\right]\cdot a+(bc)^2+bc\cdot(c+b)$$

Si observamos en la expresión algebraica que debemos demostrar no hay denominadores. Eso nos debe hacer pensar que el polinomio

$$P(a)=(1-c)\cdot(1-b)\cdot a^3+\left[-bc\cdot(c+b)+c^2+bc+b^2\right]\cdot a^2+\left[(bc)^2-c^2-bc-b^2\right]\cdot a+(bc)^2+bc\cdot(c+b)$$

tiene por raíces: $a_1=c$ y $a_2=b$.
Por tanto nos aventuramos a aplicar la regla de Ruffini a $P(a)$.

	1-c-b+bc	-bc^2-b^{2}c+c^2+bc+ b^2	(bc)^2- c^2-bc- b^2	-(bc)^2+bc^2+ b^{2}c
c		c- c^2-bc+ bc^2	c^2-(bc)^2+ b^{2}c	(bc)^2- bc^2- b^{2}c
	1-c-b+bc	c-b^{2}c+ b^2	b^{2}c-bc- b^2	0

Acabamos de demostrar que $a_1=c$ es solución de $P(a)$

	1-c-b+bc	c-b^{2}c+ b^2	b^{2}c-bc- b^2
b		b-bc- b^2+ b^{2}c	b^2+bc- b^{2}c
	1-c-b+bc	b+c-bc	0

También es solución $a_2=b$.
Nos queda el factor:

$$(1-c-b+bc)\cdot a+b+c-bc=$$

El cambio $t=b+c-bc$ facilita las operaciones:

$$(1-t)\cdot a+t=0\quad\rightarrow\quad a+\frac{t}{1-t}=0\quad\rightarrow\quad a-1+\frac{1}{1-t}=0$$

Deshaciendo el cambio: $a-1+\dfrac{1}{1-b-c+bc}=0$, que es la forma más adecuada.

Finalmente, la factorización de $P(a)$ es:

$$P(a)=(a-b)\cdot(a-c)\cdot\left(a-1+\frac{1}{1-b-c+bc}\right)$$

Así, $A=(c-b)\cdot(1-c)\cdot(1-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)\cdot\left(a-1+\dfrac{1}{1-b-c+bc}\right)$

De ese modo:

$$a^3x+b^3y+c^3z=\frac{(c-b)\cdot(1-c)\cdot(1-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)\cdot\left(a-1+\frac{1}{1-b-c+bc}\right)}{(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$a^3x+b^3y+c^3z=-(1-c)\cdot(1-b)\cdot\left(1-a-\frac{1}{1-b-c+bc}\right)$$

Rompiendo el paréntesis:

$$a^3x+b^3y+c^3z=-(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)+\frac{1-c-b+bc}{1-c-b+bc}$$

$$a^3x+b^3y+c^3z=1-(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)$$ ***<u>c.q.d</u>***

EJERCICIO Nº 50:

Eliminad x, y, z en el siguiente sistema algebraico:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a \\ (y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=b \\ x\cdot(y-z)^2+y\cdot(z-x)^2+z\cdot(x-y)^2=c \\ x^2\cdot(y-z)^2+y^2\cdot(z-x)^2+z^2\cdot(x-y)^2=d \end{array}\right\}$$

Solución:

Para resolver el problema he utilizado las fórmulas del cuadrado y el cubo de un polinomio. El proceso es correcto aunque puede haber errores en las operaciones algebraicas, por lo que os pido que lo reviséis.

De la 1ª ecuación:

$$(x+y+z)^2=a^2=x^2+y^2+z^2+2\cdot(xy+xz+yz) \qquad (1)$$

De la 2ª ecuación:

$$y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+x^2+x^2-2xy+y^2=b$$
$$2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\cdot(xy+xz+yz)=b \qquad (2)$$

Por tanto: (1) + (2) $\rightarrow\ 3\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)=a^2+b$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b}{3}$$

Sustituyendo esta expresión en (1), por ejemplo:

$$a^2=\frac{a^2+b}{3}+2\cdot(xy+xz+yz) \quad \rightarrow \quad xy+xz+yz=\frac{2a^2-b}{6} \qquad (3)$$

Resumiendo:

$$x+y+z=a$$
$$xy+xz+yz=\frac{2a^2-b}{6}$$
$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b}{3}$$

En la 3ª ecuación que nos han dado quedará:

$$x \cdot \left(y^2 - 2yz + z^2\right) + y \cdot \left(z^2 - 2xz + x^2\right) + z \cdot \left(x^2 - 2xy + y^2\right) = c$$

Desarrollando y ordenando convenientemente:

$$x^2 y + x^2 z + xy^2 + xz^2 + y^2 z + yz^2 - 6xyz = c$$

Sabemos que:

$$(x + y + z)^3 = a^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3 \cdot \left(x^2 y + x^2 z + xy^2 + xz^2 + y^2 z + yz^2\right) + 6xyz$$

Sumando estas dos últimas expresiones y operando eficientemente:

$$a^3 + c = x^3 + y^3 + z^3 + 4 \cdot \left[x^2 \cdot (y + z) + y^2 \cdot (x + z) + z^2 \cdot (x + y)\right] \qquad (4)$$

Pero, en la primera ecuación que nos han dado:

$$\begin{aligned} y + z &= a - x \\ x + z &= a - y \\ x + y &= a - z \end{aligned}$$

De ese modo en (4):

$$a^3 + c = x^3 + y^3 + z^3 + 4 \cdot \left[x^2 \cdot (a - x) + y^2 \cdot (a - y) + z^2 \cdot (a - z)\right]$$

$$a^3 + c = x^3 + y^3 + z^3 + 4 \cdot \left(ax^2 - x^3 + ay^2 - y^3 + az^2 - z^3\right)$$

$$a^3 + c = -3 \cdot \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 4a \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Habíamos demostrado que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b}{3}$$

Nos quedará pues:

$$a^3 + c = -3 \cdot \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + \frac{4a \cdot \left(a^2 + b\right)}{3}$$

$$3 \cdot \left(x^3 + y^3 + z^3\right) = \frac{4a \cdot \left(a^2 + b\right)}{3} - a^3 - c$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{a^3 + 4ab - 3c}{9} \qquad (5)$$

Necesitamos hallar el valor del triple producto xyz. Para ello nos apoyamos en una expresión obtenida anteriormente:

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 - 6xyz = c$$

$$x^2 \cdot (y+z) + y^2 \cdot (x+z) + z^2 \cdot (x+y) - 6xyz = c$$

$$x^2 \cdot (a-x) + y^2 \cdot (a-y) + z^2 \cdot (a-z) - 6xyz = c$$

$$a \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \left(x^3 + y^3 + z^3\right) - 6xyz = c$$

$$\frac{a \cdot \left(a^2 + b\right)}{3} - \frac{a^3 + 4ab - 3c}{9} - c = 6xyz$$

$$xyz = \frac{2a^3 - ab - 6c}{54} \qquad (6)$$

Resumiendo:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = a \\ xy + xz + yz = \dfrac{2a^2 - b}{6} \\ xyz = \dfrac{2a^3 - ab - 6c}{54} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{a^2 + b}{3} \\ x^3 + y^3 + z^3 = \dfrac{a^3 + 4ab - 3c}{9} \end{array}\right\} \text{y}$$

Ya sólo nos queda operar con la cuarta ecuación del enunciado:

$$x^2 \cdot \left(y^2 - 2yz + z^2\right) + y^2 \cdot \left(z^2 - 2xz + x^2\right) + z^2 \cdot \left(x^2 - 2xy + y^2\right) = d$$

$$(xy)^2 - 2x^2yz + (xz)^2 + (yz)^2 - 2xy^2z + (xy)^2 + (xz)^2 - 2xyz^2 + (yz)^2 = d$$

Reordenando convenientemente:

$$2 \cdot \left[(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2\right] - 2 \cdot \left[x^2yz + xy^2z + xyz^2\right] = d$$

$$2 \cdot \left[(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2\right] - 2 \cdot xyz \cdot (x + y + z) = d \qquad (7)$$

Por tanto, debemos hallar el valor de :

$$M = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2$$

$$(xy + xz + yz)^2 = \left(\frac{2a^2 - b}{6} \right)^2 = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2 \cdot \left[x^2 yz + xy^2 z + xyz^2 \right]$$

$$\left(\frac{2a^2 - b}{6} \right)^2 = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2 \cdot xyz \cdot (x + y + z)$$

$$\left(\frac{2a^2 - b}{6} \right)^2 - 2 \cdot xyz \cdot (x + y + z) = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 \qquad (\ 8\ )$$

Sustituyendo (8) en (7) tendremos:

$$2 \cdot \left(\frac{2a^2 - b}{6} \right)^2 - 6 \cdot xyz \cdot (x + y + z) = d \qquad (\ 9\ )$$

Apoyándonos en y eliminamos las variables *x*, *y*, *z*:

$$\frac{(2a^2 - b)^2}{18} - \frac{a \cdot (2a^3 - ab - 6c)}{9} = d$$

$$(2a^2 - b)^2 - 2a \cdot (2a^3 - ab - 6c) - 18d = 0$$

$$4a^4 - 4a^2 b + b^2 - 4a^4 + 2a^2 b + 12ac - 18d = 0$$

La relación pedida es:

$$2a^2 b - b^2 - 12ac + 18d = 0$$

Problema 53

Desde el baricentro G del triángulo ABC se trazan perpendiculares GP, GQ, GR sobre los lados BC, CA, AB respectivamente.

Calcular, en función de los elementos del triángulo ABC:

a) El área del triángulo PQR.

b) El radio de la circunferencia circunscrita a PQR.

c) La suma de las áreas de los círculos PGQ, QGR y RGP.

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Sean, en el orden usual,

a, b, c las longitudes de los lados de ΔABC,

m_a, m_b, m_c las longitudes de las correspondientes medianas

y

h_a, h_b, h_c las de las alturas

Designaremos por $[XYZ]$ el área de un triángulo XYZ.

Si D es el pie de la perpendicular trazada por A sobre BC y M el punto medio de dicho lado, los triángulos ADM y GPM son semejantes; por tanto,

$$\frac{GP}{AD}=\frac{GM}{AM}\ .$$

Siendo $AD=h_a$ y $\frac{GM}{AM}=\frac{1}{3}$, por la propiedad del baricentro de trisecar cada mediana, resulta

$$GP=\frac{1}{3}h_a\ .$$

Análogamente, $GQ=\frac{1}{3}h_b$ y $GR=\frac{1}{3}h_c$.

Pues $\angle GPC$ y $\angle GQC$ son rectos, el cuadrilátero $GPCQ$ es inscriptible en la circunferencia de diámetro GC y, por ser suplementarios los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscriptible, tenemos $\angle PGQ=180^\circ-C$.

Resulta entonces

$$\begin{aligned}[GPQ]&=\frac{1}{2}GP\cdot GQ\cdot\sin\left(\angle PGQ\right)\\&=\frac{1}{18}h_ah_b\sin C\\&=\frac{1}{18}\cdot\frac{bc\sin A}{a}\cdot\frac{ca\sin B}{b}\cdot\sin C\\&=\frac{1}{18}c^2\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

y, por permutación circular,

$$[GQR]=\frac{1}{18}a^2\sin A\sin B\sin C\,,\quad [GRP]=\frac{1}{18}b^2\sin A\sin B\sin C$$

de donde

$$[PQR]=[GPQ]+[GQR]+[GRP]=\frac{1}{18}\left(a^2+b^2+c^2\right)\sin A\sin B\sin C \qquad (1)$$

Esto contesta a).

b) La circunferencia circunscrita a ΔGPQ es la que circunscribe el cuadrilátero $GPCQ$ y su diámetro, según se ha visto, es GC. El teorema del seno, aplicado al triángulo GPQ da inmediatamente

$$\begin{aligned} PQ &= GC\cdot\sin(\angle PGQ) \\ &= \frac{2}{3}m_c\sin C \end{aligned}$$

y, por permutación circular,

$$QR=\frac{2}{3}m_a\sin A\,,\qquad RP=\frac{2}{3}m_b\sin B$$

Sustituímos estas expresiones, así como la (1), en la fórmula $\dfrac{PQ\cdot QR\cdot RP}{4[PQR]}$ que da el valor del radio r de la circunferencia circunscrita a ΔPQR. El resultado es

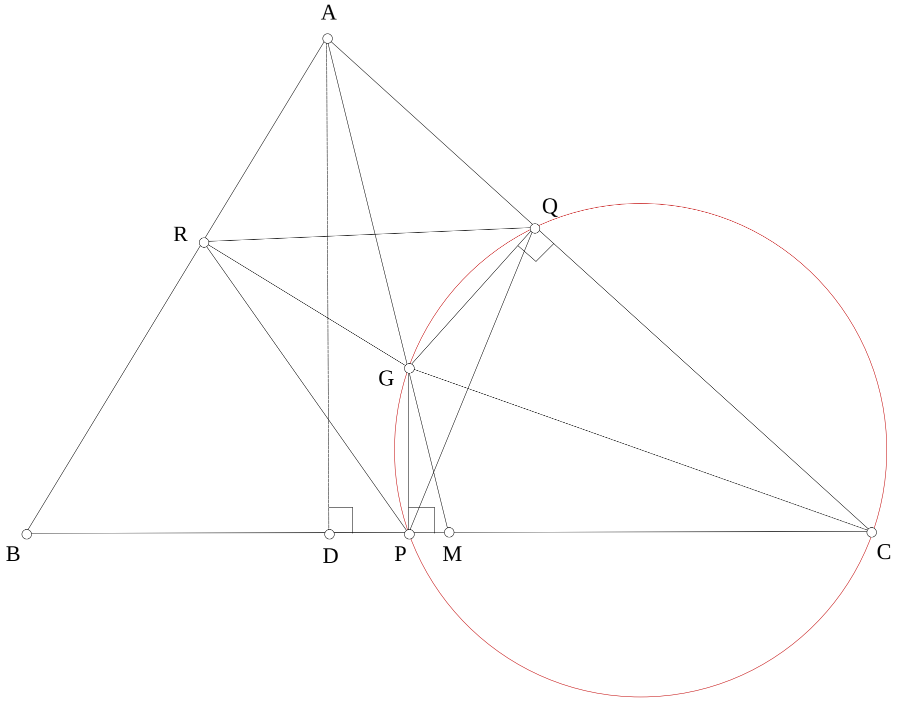
$$\begin{aligned} r &= \frac{4m_am_bm_c}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)} \\ &= \frac{m_am_bm_c}{m_a^2+m_b^2+m_c^2} \end{aligned}$$

por la conocida relación $a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)$.

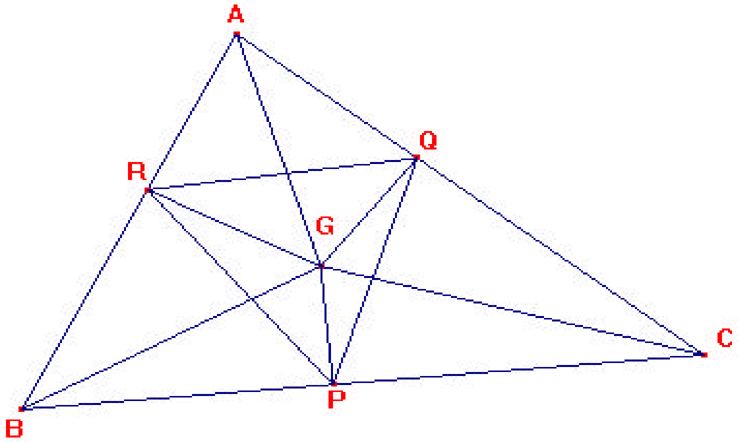
c) Pues los diámetros de los círculos PGQ, QGR y RGP son, respectivamente los segmentos GC, GA y GB, la suma de las áreas que se pide es igual a

$$\frac{p}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)$$

que, expresada en función de los lados del triángulo, se escribe $\frac{p}{12}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.


A
Q
R
G
B
D
P
M
C

Solución de Dones Colmenárez (Barquisimeto, Venezuela); esta última da todos los resultados pedidos en función de las longitudes de las medianas del triángulo. Origen del problema : "*Mathematical Problem Papers*", reunidos por el Rev. E.M.Radford, Cambridge 1931



Demostración:

a)-. Como los ángulos ∠ ARG y ∠AQG son rectos, entonces el cuadrilátero □ ARGQ es inscriptible en una circunferencia de diámetro AG (circunferencia circunscrita al $\Delta ARQG$) (*)

Aplicando la ley de los senos generalizada en los ΔARG y ΔABC se obtiene:

$\dfrac{RQ}{senA} = AG$ y $\dfrac{a}{senA} = 2R$ (aquí R es el circunradio del ΔABC)

Por lo tanto, $RQ = \dfrac{a \cdot AG}{2R}$

Además, por propiedad de la mediana, $AG = \dfrac{2}{3} m_a$; en consecuencia, $RG = \dfrac{a \cdot m_a}{3R}$

Similarmente, $RP = \dfrac{b \cdot m_b}{3R}$ y $PQ = \dfrac{c \cdot m_c}{3R}$

Por la formula de Heron

$[[PQR] = \sqrt{s(s-r)\cdot(s-q)\cdot(s-p)}$. , donde t = PQ, q = RP , p = QR y $s = \dfrac{r+q+p}{2}$

Luego,

$$[PQR] = \sqrt{\left(\frac{cm_c + bm_b + am_a}{6R}\right)\left(\frac{am_a + bm_b - cm_c}{6R}\right)\left(\frac{am_a - bm_b + cm_c}{6R}\right)\left(\frac{-am_a + bm_b + cm_c}{6R}\right)}$$

$$=\frac{1}{36R^2}\sqrt{(cm_c+bm_b+am_a)(am_a+bm_b-cm_c)(am_a-bm_b+cm_c)(-am_a+bm_b+cm_c)}$$

b) Como $[PQR]=\dfrac{rpq}{4R_1}$ donde R_1 es el radio de la circunferencia circunscrita al ΔPQR

entonces:

$$R_1=\frac{\left(\dfrac{cm_c}{3R}\right)\left(\dfrac{bm_b}{3R}\right)\left(\dfrac{am_a}{3R}\right)}{\dfrac{1}{36R^2}\sqrt{(cm_c+bm_b+am_a)(am_a+bm_b-cm_c)(am_a-bm_b+cm_c)(-am_a+bm_b+cm_c)}}$$

$$=\frac{4}{3R}\frac{(am_a+bm_b+cm_c)}{\sqrt{(cm_c+bm_b+am_a)(am_a+bm_b-cm_c)(am_a-bm_b+cm_c)(-am_a+bm_b+cm_c)}}$$

c) Sean $A_{1,}A_2yA_3$ las áreas de los círculos **RQG, RGP** y **PGQ** respectivamente.

En el desarrollo de la parte **a),** se probó que la circunferencia circunscrita al triángulo **RQG** tiene diámetro **AG** $=\dfrac{2}{3}ma$

Por lo tanto $A_1=p\left(\dfrac{2}{3}ma\right)^2=\dfrac{4}{9}pm_a^2$. Analógicamente

$$A_2=\frac{4}{9}p\cdot m_b^2$$

$$A_3=\frac{4}{9}p\cdot m_c^2$$

Luego $A_1+A_2+A_3=\dfrac{4}{9}p\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)$

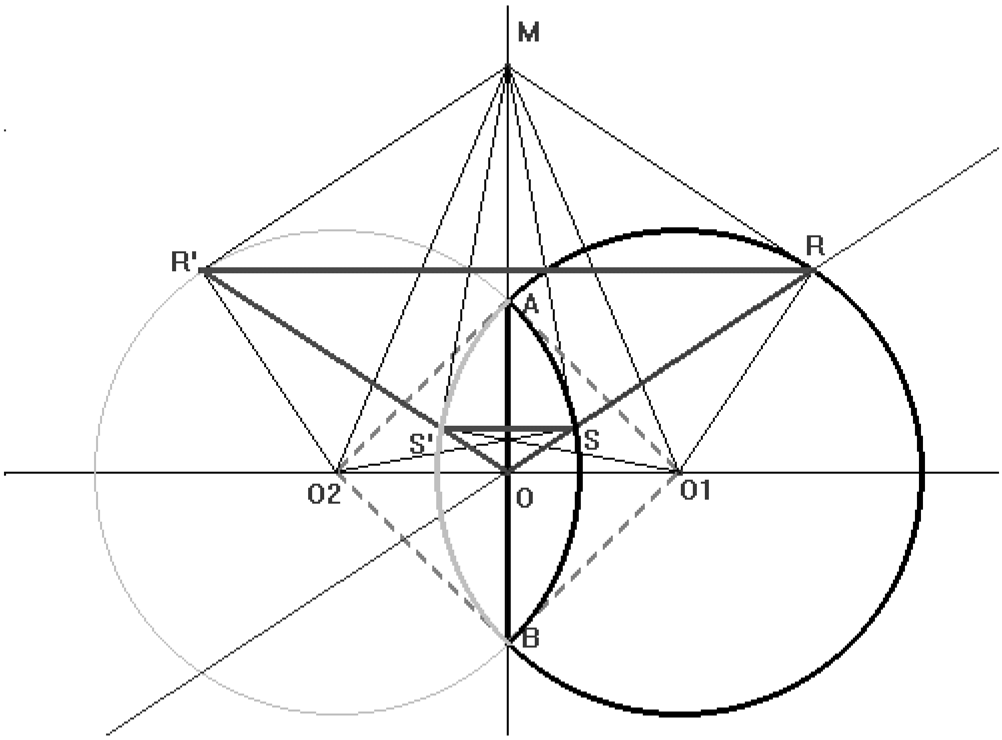
Problema 54
(Propuesto por la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, 1941).
Se dibuja sobre una recta *r* un segmento AB y se trazan, en el mismo semiplano, los arcos capaces de 45º y 135º.
Determinar la envolvente de las rectas RS, siendo R y S los puntos de tangencia de las tangentes trazadas as dichos arcos capaces (R sobre el arco capaz de 45º, S sobre el de 135º) desde un punto M que se desplaza sobre la recta r.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

La construcción de los dos arcos capaces enunciados equivale a la construcción de dos circunferencias de centros situados sobre la mediatriz del segmento AB dado, en distintos semiplanos y de radios iguales a $\frac{\sqrt{2}}{2}.\overline{AB}$.

Entonces, la recta *r* dada se constituye en el eje radical de estas dos circunferencias iguales y ortogonales. Así, desde cualquier punto M de la recta *r*, excepto sobre los puntos del segmento AB, podemos trazar los segmentos de las tangentes MR = MS' en una y MR' = MS en la otra, determinando trivialmente una serie de triángulos isósceles semejantes como ORR' y OSS', lo cual nos permite asegurar que las rectas RS, independientemente de la posición variable sobre *r* del punto M, se cortan todas ellas en el punto O, punto medio del segmento dado AB.

La envolvente de las rectas RS se reduce al punto medio del segmento AB.



Problema 55

(Propuesto por la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, 1942).

Un cuadrilátero variable ABCD tiene el lado AB fijo; el lado CD constante gira alrededor del punto O de intersección de los lados CD y AB. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de los lados BC y AD.

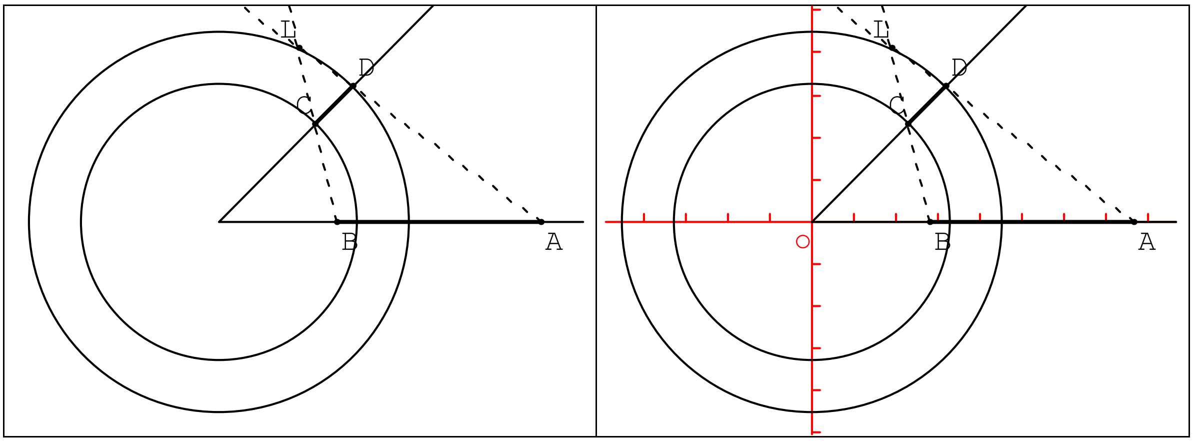
Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

Del análisis del enunciado destacamos la siguiente variación al mismo. El lugar solicitado es equivalente al lugar geométrico de los puntos L del plano, intersección de las rectas AD y BC, donde el segmento AB está dado inicialmente y los puntos C y D son puntos variables sobre dos circunferencias de igual centro O y radios fijos R_1 y R_2, con la condición de que los puntos O, C y D estén siempre alineados al igual que lo están O, A y B.

En concreto, consideramos un sistema de coordenadas cartesianas propiciado por los siguientes elementos.

Eje X: Recta que pasa por el segmento AB.

EjeY: Recta perpendicular al eje X por O, punto intersección de las rectas AB y CD.



Según este sistema de referencia, podemos asignar coordenadas a los extremos del segmento AB de manera que A(a,0), B(b,0).

Sean las dos circunferencias C_1 y C_2, de centro el origen y que pasan por los puntos C y D, puntos de intersección con la semirrecta $y = k\cdot x$ ($k \neq 0$), respectivamente. Sus ecuaciones son:

C_1 : $x^2 + y^2 = R_1^2$

C_2 : $x^2 + y^2 = R_2^2$

De este modo, las coordenadas de los puntos C y D son las siguientes:

$$C\left(\frac{R_1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k.R_1}{\sqrt{1+k^2}}\right),\ D\left(\frac{R_2}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k.R_2}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

Por tanto, las ecuaciones de las rectas AD y BC serán:

AD: $k.R_2.x - (R_2 - a.\sqrt{1+k^2}).y = k.a.R_2$

BC: $k.R_1.x - (R_1 - b.\sqrt{1+k^2}).y = k.b.R_1$

Un poco de cálculo nos da las coordenadas del punto L:

$$L\left(\frac{(a-b).R_1.R_2}{(R_1a - R_2b)\sqrt{1+k^2}} + \frac{a.b.(R_1 - R_2)}{(R_1a - R_2b)}, \frac{(a-b).R_1.R_2.k}{(R_1a - R_2b)\sqrt{1+k^2}}\right)$$

Una vez halladas las coordenadas x e y del punto L nos disponemos a eliminar el parámetro k .
Para ello, señalamos la siguiente relación de interés entre dichas coordenadas:

$$x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}=\frac{(a-b).R_1.R_2}{(R_1a-R_2b)\sqrt{1+k^2}}$$

$$y=\frac{(a-b).R_1.R_2.k}{(R_1a-R_2b)\sqrt{1+k^2}}$$

Por tanto, el valor de *k* vendrá dado por la expresión:

$$k=\frac{y}{x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de *k* encontrado en alguna de las ecuaciones de y (o *x*), obtenemos con un poco de cálculo:

$$\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2=\frac{(a-b)^2.R_1{}^2.R_2{}^2}{(R_1a-R_2b)^2.\left(1+\left(\frac{y}{x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}}\right)^2\right)}$$

$$\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2=\frac{(a-b)^2.R_1{}^2.R_2{}^2.\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2}{(R_1a-R_2b)^2.\left(\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2+y^2\right)}$$

$$\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2+y^2=\frac{(a-b)^2.R_1{}^2.R_2{}^2}{(R_1a-R_2b)^2}$$

Lugar geométrico que representa la ecuación de la circunferencia de centro el punto $O'\left(\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)},0\right)$ y de radio $R=\left|\frac{(a-b).R_1.R_2}{(R_1a-R_2b)}\right|$

PROBLEMAS PROPUESTOS (56-60)

Problema 56, propuesto por J.L. Díaz Barrero, Barcelona, España.
Los números de Lucas son $1,3,4,7,11,18,29,47,76,\cdots,$ con

$$L_1 = 1, L_2 = 3, \quad \text{y para todo } n \geq 2, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

Calcular la suma

$$\frac{1}{1 \bullet 3} - \frac{1}{3 \bullet 4} + \frac{1}{4 \bullet 7} - \frac{1}{7 \bullet 11} + \frac{1}{11 \bullet 18} - \cdots$$

Problema 57, propuesto por J.B.Romero Márquez, Ávila, España.(Modificado por el editor)
Estudiar las propiedades del triángulo especial en el que

$$m_a(h_a - 2r) = r^2,$$

donde m_a es la longitud de la mediana desde A, h_a es la longitud de la altura desde A, y r es el radio del círculo inscrito.

Problema 58, propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.
Si p y q son números reales positivos, demostrar que

$$1 \leq \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}}\,.$$

¿En qué condiciones se verifica la igualdad?

Problema 59, propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.
Sea $a > 0$. Calcular

$$\lim_{a \to 1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x)(1+ax)}.$$

Problema 60, propuesto en la Escuela Especial de Ingenieros de Montes, 1942.
Resolver en los números enteros la ecuación

$$xyz = xy + yz + zx.$$

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (12)

UN MATEMÁTICO APÓCRIFO :
EUCLIDES PARACELSO BOMBASTO UMBUGIO

Francisco Bellot Rosado

Cuando se tiene la fortuna de disponer de colecciones completas de buenas revistas, en ocasiones se descubre que la comunidad matemática - que tiene fama de adusta - también da muestras de buen humor. Esto es particularmente cierto en el caso del *American Mathematical Monthly o Crux Mathematicorum*.

Agradecemos muy sinceramente al Director de Publicaciones del *Monthly*, Prof. Donald J. Albers, por habernos dado permiso para utilizar en la *Revista Escolar de la O.I.M.* los problemas referidos al Prof. Euclides Paracelso Bombasto Umbugio, publicados allí entre 1946 y 1976. En todas las citas del *Monthly*, el Copyright corresponde a The Mathematical Association of America, que tiene reservados todos los derechos.

La primera aparición pública del ”Prof. Umbugio” fué en el problema E716, *The American Mathematical Monthly, vol.*53 (1946), *p.*219. Figuraba propuesto por H.E.G.P. y decía así:

”El 1 de abril de 1946, el diario *Erewhon Daily Howler* incluía la siguiente noticia : El famoso numerólogo y astrólogo de Guayazuela, Prof. Euclides Paracelso Bombasto Umbugio, predice el fin del mundo para el año 2141. Su predicción está basada en profundas investigaciones matemáticas e históricas. Umbugio calcula el valor de la fórmula

$$1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$$

para $n = 0, 1, 2, 3,$ y así sucesivamente hasta 1945, y encuentra que todos esos números, obtenidos tras meses de laboriosos cálculos, son divisibles por 1946. Ahora bien, 1492, 1770 y 1863 son fechas memorables : el descubrimiento de América, la matanza de Boston y la arenga de Gettysburg. ¿Cuál puede ser la de 2141? El fin del Mundo, obviamente.

¡Apabulle al Profesor! Demuestre con pocos cálculos que la fórmula propuesta es divisible por 1946 para todo n...”

Un año más tarde, volvía a publicarse en *Monthly* un problema de Umbugio, también propuesto por H.E.G.P., el E766 (*The American Mathematical Monthly*, *vol.*54(1947),*p.*223) :

”El Profesor Umbugio, que fué presentado a nuestros lectores el pasado abril, ha inventado un notable procedimiento para revisar libros. Divide el tempo que se concede a sí mismo para hacerlo en tres partes, α, β, γ. Dedica la fracción α de su tiempo a un profundo estudio de la portada y la encuadernación. Dedica la fracción β a una búsqueda frenética de su propio nombre en el libro, y citas de sus trabajos. Finalmente, dedica la fracción γ a un análisis proporcionalmente penetrante del texto restante. Conociendo su característico gusto por los métodos simples y directos, no dejaremos de impresionarnos por las ecuaciones diferenciales en que basa su método:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = y - z,\ \frac{dy}{dt} = z - x,\ \frac{dz}{dt} = x - y.$$

Considera un sistema de soluciones x, y, z que está determinado por las soluciones iniciales dependientes de un (pequeño) parámetro ε, independiente de t. Por lo tanto, x, y, z pueden ponerse como

$$(2)\ \ x = f(t,\varepsilon),\ y = g(t,\varepsilon),\ z = h(t,\varepsilon).$$

Las funciones (2) satisfacen (1) y las condiciones iniciales

$$(3)\ \ f(0,\varepsilon) = \frac{1}{3} - \varepsilon,\ g(0,\varepsilon) = \frac{1}{3},\ h(0,\varepsilon) = \frac{1}{3} + \varepsilon.$$

El Profesor Umbugio define sus importantes fracciones α, β, γ como

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(2,\varepsilon) = \alpha,\ \lim_{\varepsilon\to 0} g(5,\varepsilon) = \beta,\ \lim_{\varepsilon\to 0} h(279,\varepsilon) = \gamma.$$

¡Apabulle al Profesor! Encuentre α, β, γ sin mucho cálculo numérico."
La solución es $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.

Surge, inevitablemente, la pregunta obvia : ¿Quién fué H.E.G.P.? Curiosamente, los demás problemas de Umbugio en el *Monthly* (11 *más*) no fueron propuestos por H.E.G.P., que verosimilmente es el creador del personaje. Algunos de los problemas de Umbugio fueron extraordinariamente populares, como por ejemplo E1111, donde se pedía reconstruir una división entera entre un dividendo de 8 cifras y un divisor de 3, de cuyo cociente sólo se conoce una cifra 8 situada en medio, y que fué resuelto por 70 lectores. Este problema fué incluído en la recopilación publicada en *Monthly* en 1957 como *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, una publicación para honrar la memoria del editor de problemas del *AMM* desde 1918 a 1946, siendo editor jefe desde 1933.

En varios artículos del *Monthly* fueron apareciendo, además de los problemas de Umbugio, títulos que supuestamente formaban parte de su Biblioteca. Citaremos algunos de ellos :

Los Jacobianos y su lucha por la Independencia
Una dieta de 10 *días para mejorar formas indeterminadas*
Una breve tabla de los números primos pares
Declive y caída de e^{-x}
Los postulados de Peano transcritos para violín y cello.
Primeros auxilios ante cortaduras de Dedekind
(Peter Hagis, *An analyst bookshelf*, *The American Mathematical Monthly*, *vol.*69(1962), *pp.*980-981)
Un millón de números aleatorios en orden creciente
(*AMM*, *vol.*71,1964,*p.*283)
Limpiando residuos en el plano complejo
Filtros - por una Topología más limpia
(E.S.Langford, University of Maine at Orono)
22/7 *calculado hasta el millón de cifras decimales*
(Clayton W.Dodge, University of Maine at Orono)

Umbugio también apareció en *Crux Mathematicorum*, cuando esta revista todavía se llamaba *Eureka*. En 1976 fué publicada *A direct geometrical proof of Morley's theorem* (*Eureka*, *vol.* 2, 1976, *p.*162), *por Euclides Paracelso Bombasto Umbugio, Guayazuela*.

Su demostración termina con el clásico Q.E.D., al que se añade N.F.C.

En dos notas al pie de página se lee : "Esta demostración fué comunicada por el renombrado problemista Prof. Euclides Paracelso Bombasto Umbugio al Dr. Leon Bankoff, Los Angeles, California, quien amablemente la ha traducido para nosotros. El original está escrito en esperanto, lengua que el Dr. Bankoff habla como un nativo. El Prof. Umbugio es bien conocido como numerólogo; ésta es una de sus raras excursiones en Geometría.

N.F.C. es la abreviatura de *Ne fronti Crede*, la frase latina equivalente a *No te creas todo lo* *que veas*. El Dr. Bankoff dice que, para evitar situaciones embarazosas para el Profesor, se tomó la libertad de añadir N.F.C al clásico Q.E.D. (*Quod erat demonstrandum*). Los conocedores de los artículos del Prof. Umbugio reconocerán la necesidad de este *addendum* menor.”

Volvamos a la pregunta que nos hacíamos líneas atrás. ¿Quién creó a nuestro personaje?¿Quién está detrás de las siglas H.E.G.P.? La clave está en *Mathematical Circles revisited*, de Howard Eves (Prindler, Weber, Schmidt, 1971; hay reedición de la M.A.A). Eves sirvió en el Departamento de Problemas elementales del *Monthly* durante 25 años. En este libro cuenta : *En* 1946, *el Prof. George Polya y yo pensamos que valía la pena incluir en cada número de abril del Monthly una especie de inocentada en forma de problema*....(en los países anglosajones, el 1 de abril es el día de dar inocentadas)...*decidimos que fueran supuestamente originales del numerólogo de Guayazuela Euclides Paracelso Bombasto Umbugio...la broma alcanzó a muchos lectores del Monthly, y las cartas recibidas preguntando su dirección llenarían un pequeño panfleto. A todos los que preguntaron se les dijo que el Profesor Umbugio viajaba mucho, y que la mejor manera de hacerle llegar las cartas era a través del Departamento de Problemas Elementales del Monthly*....”

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (12)

Una editorial rumana de Matemáticas

www.gil.ro

Puede parecer extraño reseñar en la Revista de la OIM una página web de una empresa editorial, la Editura GIL, de Zalau, en Rumania. Sin embargo, como espero se comprobará sin tardar, el número y la calidad de los libros de Matemáticas que ha publicado en un breve espacio de tiempo justifican sobradamente, a mi juicio, esta inclusión.

La Editura GIL (iniciales de su *motto: Gandeste Inteligent si Liber*, frase rumana que se podría traducir, libremente, como *Pensamiento inteligente y libre)* fue fundada en 1993 por el Profesor de Matemáticas Mircea Lascu. En 1998 inició la publicación de algunas obras en inglés, en particular los folletos que la delegación de Rumania en la IMO repartía a los Profesores participantes, *Romanian Mathematical Competitions.* En la actualidad tiene publicadas al menos ocho obras muy importantes para la preparación de Olimpiadas y concursos de Matemáticas:

- ***360 Problems for mathematical contests (Titu Andreescu, Dorin Andrica)***
- ***Desigualdades,ideas y métodos (Mihai Onucu Drimbe)***
- ***200 Problemas de ecuaciones funcionales(Mihai Onucu Drimbe)***
- ***Introducción al estudio de las ecuaciones diofánticas (Titu Andreescu, Dorin Andrica)***
- ***Desigualdades elementales...y no tan elementales(Mircea Becheanu, Bogdan Enescu)***
- ***Geometria plana (sintética, vectorial y analítica)***

- ***Inducción matemática (Laurentiu Panaitopol, Maria Elena Panaitopol, Mircea Lascu)***

Casi todas estas obras forman parte de la Biblioteca de Olimpiadas matemáticas, pero lógicamente la editorial publica más libros. Son bien conocidos en Rumania sus excelentes manuales (libros de texto) de los diferentes cursos de su sistema educativo; las recopilaciones de problemas de sus abundantes concursos de Matemáticas, y de otras materias, como la Historia de Rumania o la Informática.

El idioma rumano es el único de origen latino que se habla en Europa Oriental. Es muy similar al español y al italiano, y no debería ofrecer dificultades serias de comprensión para un lector culto. En la página web reseñada aparece la dirección postal y el número de fax de la editorial, para quien esté interesado en ponerse en contacto con esta interesante editorial.

Valladolid, febrero 2004.

Francisco Bellot Rosado

COMENTARIO DE LIBROS

CRIATIVIDADE E JOGOS DIDÁTICOS

Diva Marília Flemming y Ana Cláudia Collaço de Mello

Editora Saint Germain, 2003. ISBN 85-88759-08-X

El pequeño libro que comentamos (128 páginas) ha sido escrito por dos Profesoras de la Universidad do Sul, en Santa Catarina (Brasil). Es, como decimos, pequeño en número de páginas, pero su utilización por los profesores irá, seguramente, mucho más allá.

El libro se inicia con un capítulo sobre creatividad, características del proceso creativo en general y sobre la creatividad en el contexto educativo, analizando brevemente las características del profesor creativo, el alumno creativo y la secuencia didáctica y el proceso creativo. El segundo capítulo se dedica a los juegos didácticos, en particular a los objetivos para el uso en el aula de los mencionados juegos. En el tercer capítulo se hace la propuesta metodológica de las autoras para dirigir la utilización en clase de los juegos didácticos, que ha sido experimentada en varios cursos de capacitación de Profesores. Por último, en el capítulo cuarto – que ocupa de la página 54 a la 128, es decir, más de la mitad del libro – se describen detalladamente 12 juegos, entre los que aparecen el juego de Nim y los cuadrados mágicos, susceptibles de ser aplicados en todas las etapas de la enseñanza, en opinión de las autoras. Además en Apéndice se describen otras 18 actividades recreativas, igualmente aplicables a situaciones didácticas concretas. La Bibliografía incluye 38 títulos relacionados con el tema.

Para quienes consideramos esencial la búsqueda y descubrimiento temprano de los alumnos con alta capacidad matemática (los alumnos creativos, por utilizar esta palabra), un libro como el que comentamos puede ser un excelente medio para identificarlos. La segunda parte (darles los materiales que necesitan y merecen para explotar todas sus capacidades) es otra historia.

Valladolid, febrero de 2004.
Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI