

Problema 56

Propuesto por J.L. Díaz Barrero, Barcelona, España.

Los números de Lucas son 1,3,4,7,11,18,29,47,76,..., con

$$L_1=1, L_2=3, \text{ y para todo } n \geq 2, L_n=L_{n-1}+L_{n-2}.$$

Calcular la suma

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 18} - \dots$$

Es conocida la sucesión de los números de Fibonacci, definida por $F_1=F_2=1$, y para todo $n \geq 2$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Se demuestra primero el siguiente

Lema: Los números de Lucas y de Fibonacci satisfacen la siguiente relación:

$$L_{n+1}F_{n+1} - L_{n+2}F_n = (-1)^n \text{ para todo } n \geq 1.$$

Demostración: El resultado es obvio para $n=1$, pues $L_2F_2 - L_3F_1 = 3 - 4 = -1$. Si se cumple para $n=m$, entonces para $n=m+1$ tenemos:

$$\begin{aligned} L_{m+2}F_{m+2} - L_{m+3}F_{m+1} &= L_{m+2}(F_{m+1} + F_m) - (L_{m+2} + L_{m+1})F_{m+1} \\ &= L_{m+2}F_m - L_{m+1}F_{m+1} = -(-1)^m = (-1)^{m+1}. \end{aligned}$$

Luego el lema queda probado por inducción.

La suma que se pide calcular, que llamaremos S , se puede expresar como:

$$S = \frac{1}{L_1L_2} - \frac{1}{L_2L_3} + \frac{1}{L_3L_4} - \frac{1}{L_4L_5} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{L_iL_{i+1}}.$$

Se define ahora la suma parcial de los n primeros sumandos S_n , la cuál se demostrará que cumple la siguiente relación:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{L_iL_{i+1}} = \frac{F_n}{L_{n+1}}.$$

Obviamente, por ser $L_1=F_1=1$, $S_1=1/(1 \cdot 3)$. Si la anterior relación se cumple para $n=m$, entonces para $n=m+1$ tenemos:

$$S_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(-1)^i}{L_iL_{i+1}} = S_m + \frac{(-1)^{m+2}}{L_{m+1}L_{m+2}} = \frac{F_mL_{m+2} + (-1)^m}{L_{m+1}L_{m+2}} = \frac{L_{m+1}F_{m+1}}{L_{m+1}L_{m+2}} = \frac{F_{m+1}}{L_{m+2}}.$$

Luego la expresión para S_n ha sido demostrada por inducción. Obviamente, S es el límite cuando n tiende a infinito de S_n . Para hallar este límite, se utilizará que los términos generales de las sucesiones de Lucas y Fibonacci vienen dados por:

$$L_n = Ar_1^n + Br_2^n, \quad F_n = Cr_1^n + Dr_2^n,$$

donde A , B , C y D son constantes a determinar, siendo r_1 y r_2 las raíces de la ecuación:

$$x^2 = x + 1.$$

En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-2} &= Ar_1^{n-1} + Br_2^{n-1} + Ar_1^{n-2} + Br_2^{n-2} = Ar_1^{n-2}(1+r_1) + Br_2^{n-2}(1+r_2) \\ &= Ar_1^n + Br_2^n = L_n, \end{aligned}$$

y de forma similar para los F_n . Las condiciones iniciales se cumplen haciendo:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{L_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5(1+\sqrt{5})} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \right]}{\left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} \right]} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

