Problema 57

Propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España. (Modificado por el editor)

Estudiar las propiedades del triángulo especial en el que

$$m_a\left(h_a-2r\right)=r^2,$$

donde m_a es la longitud de la mediana desde A, h_a es la longitud de la altura desde A, y r es el radio del círculo inscrito.

Utilizaremos las siguientes (conocidas) relaciones, donde S es el área del triángulo, y a, b, c las medidas de BC, CA, AB respectivamente:

$$16S^2=\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(a-b+c\right)\left(-a+b+c\right);$$

$$ah_a=\left(a+b+c\right)r=2S;$$

$$4m_a^{\ 2}=2b^2+2c^2-a^2.$$

Podemos entonces escribir:

$$h_a=\frac{2S}{a}=r\frac{a+b+c}{a}; \qquad \frac{r}{m_a}=\frac{h_a}{r}-2=\frac{-a+b+c}{a};$$

$$\frac{m_a}{a}=\frac{r}{\left(-a+b+c\right)}=\frac{2S}{\left(a+b+c\right)\left(-a+b+c\right)};$$

$$\frac{4m_a^{\ 2}}{a^2}=\frac{16S^2}{\left(a+b+c\right)^2\left(-a+b+c\right)^2}=\frac{\left(a+b-c\right)\left(a-b+c\right)}{\left(a+b+c\right)\left(-a+b+c\right)};$$

$$a^2\left[a^2-\left(b-c\right)^2\right]=4m_a^{\ 2}\left[\left(b+c\right)^2-a^2\right]=\left[2\left(b^2+c^2\right)-a^2\right]\left[\left(b+c\right)^2-a^2\right];$$

$$a^4-a^2\left(b-c\right)^2=a^4-a^2\left[\left(b+c\right)^2+2\left(b^2+c^2\right)\right]+2\left(b^2+c^2\right)\left(b+c\right)^2;$$

$$2\left(b^2+c^2\right)\left(b+c\right)^2=a^2\left[\left(b+c\right)^2+2\left(b^2+c^2\right)-\left(b-c\right)^2\right]=2a^2\left(b+c\right)^2;$$

$$b^2+c^2=a^2.$$

Luego por lo tanto el triángulo especial debe ser rectángulo en A.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI