

Problema 58

Propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.

Si  $p$  y  $q$  son números reales positivos, demostrar que

$$1 \leq \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}}.$$

¿En qué condiciones se verifica la igualdad?

Realizamos primero la (relativamente astuta) sustitución  $r^2 = q/(2p^2)$ , donde sin pérdida de generalidad tomamos  $r$  como positivo. Se tiene entonces que:

$$\sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}} = \sqrt{\frac{1 + 8r^2}{4r^2}} - \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1 + 8r^2}}} = \frac{\sqrt{1 + 8r^2} - \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 8r^2} - 1}{2}}}{2r}$$

Podemos hacer ahora la (un poco más obvia) siguiente sustitución:

$$x = \frac{\sqrt{1 + 8r^2} - 1}{2}; \quad 2x + 1 = \sqrt{1 + 8r^2}; \quad 2r = \sqrt{2x(x + 1)}.$$

Se tiene entonces finalmente que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}} &= \frac{2x + 1 - \sqrt{x}}{\sqrt{2x(x + 1)}} \geq \frac{4x + 2 - 2\sqrt{x}}{3x + 1} \\ &= 1 + \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{3x + 1} = 1 + \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{3x + 1} \geq 1, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la desigualdad entre medias aritmética y geométrica a los números  $2x$  y  $x + 1$ , además de que, por definición,  $x$  es positivo. La igualdad se da si y sólo si  $\sqrt{x} - 1 = 0$ , y simultáneamente  $2x = x + 1$ , es decir, si y sólo si  $x = 1$ , y por lo tanto, si y sólo si  $r = 1$ , o sea, si y sólo si  $q = 2p^2$ .

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoid/>

Edita:

