Problema 59

Propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.

Sea a>0. Calcular

$$\lim_{a\to 1}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x)(1+ax)}.$$

Se pide calcular:

$$\lim_{a\to 1} I(a),$$

donde se ha definido

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x)(1+ax)}=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{a}{ax+1}\right)dx.$$

Ahora bien, tomando b>0, se tiene:

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{a}{ax+1}\right)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{a}{ax+1}\right)dx=\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^{b}\frac{dx}{x+a}dx-\int_0^{b}\frac{adx}{ax+1}\right];$$

$$\int_0^{b}\frac{dx}{x+a}dx=\ln(b+a)-\ln(a)=\ln\left(\frac{b+a}{a}\right);$$

$$\int_0^{b}\frac{adx}{ax+1}=\int_0^{ab}\frac{dy}{y+1}=\ln(ab+1)-\ln(1)=\ln(ab+1);$$

$$I(a)=\frac{1}{1-a^2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{b+a}{a}\right)-\ln(ab+1)\right]=\frac{1}{1-a^2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{a^2}\frac{b+a}{b+\frac{1}{a}}\right)\right]=\frac{\ln(a^2)}{a^2-1}.$$

Por lo tanto, como haciendo el desarrollo de $\ln(a^2)$ alrededor de $a^2=1$ se tiene:

$$\ln(a^2)=(a^2-1)-\frac{(a^2-1)^2}{2}+\frac{(a^2-1)^3}{3}-\frac{(a^2-1)^4}{4}+\ldots=(a^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a^2)^n}{n+1};$$

$$\lim_{a\to 1}I(a)=\lim_{a\to 1}\frac{\ln(a^2)}{a^2-1}=\lim_{a\to 1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a^2)^n}{n+1}\right)=1.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI