Problema 60

Propuesto en la Escuela Especial de Ingenieros de Montes, 1942.

Resolver en los números enteros la ecuación

$$xyz = xy + yz + zx \, .$$

Supongamos que uno de los enteros (x sin pérdida de generalidad) es nulo. Se tiene entonces que yz=0, es decir, no puede haber exactamente uno de los tres números que sea nulo. Admitimos entonces las soluciones (0,0,l), donde l es un entero cualquiera, además de todas sus permutaciones cíclicas. Nos queda entonces por encontrar las soluciones donde ninguno de los tres enteros sea nulo.

Los tres enteros no pueden ser negativos simultáneamente, pues en caso contrario los miembros de la derecha y de la izquierda tendrían signos opuestos. Supongamos que dos de los enteros (x e y sin pérdida de generalidad) son negativos, y el tercero positivo. Se tiene entonces que:

$$0 < z = \frac{xy}{xy - x - y} = \frac{|xy|}{|xy| + |x| + |y|} < 1 \, .$$

Por lo tanto, si ninguno de los enteros es nulo, a lo sumo uno puede ser negativo. Sea entonces x negativo, e y, z positivos, asumiendo sin pérdida de generalidad que y>z. Escribimos entonces:

$$|x|\, yz < yz\left(1 + |x|\right) = \left(z + y\right)|x| \, ; \qquad\qquad yz < z + y < 2y \, .$$

Por lo tanto, z=1, con lo que x=–y, y se tienen las soluciones (l,–l,1) y todas sus permutaciones cíclicas, donde l es un entero cualquiera. Nótese que z=1 implica directamente x=–y, con lo que si uno cualquiera de los enteros es igual a 1, entonces uno de los otros dos es negativo.

Supongamos entonces que los tres enteros son positivos, siendo sin pérdida de generalidad 1<x≤y≤z. Aplicando entonces la desigualdad entre el mínimo y la media armónica, se tiene:

$$x \leq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 3 \, ,$$

dándose la igualdad si y solamente si x=y=z=3, que se puede comprobar que es una solución de la ecuación. Nos queda entonces probar únicamente el caso en el que x=2 con 2<y≤z positivos. En este caso, se tiene que:

$$yz = 2(y+z); \qquad z = \frac{2y}{y-2} \geq y; \qquad 4y \geq y^2; \qquad 4 \geq y.$$

Tenemos entonces los casos y=3, z=6, y y=z=4. Por lo tanto, (x,y,z) es solución si y solamente si es una permutación cíclica de una de las siguientes:

$$(3,3,3), \qquad (2,3,6), \qquad (2,4,4), \qquad (l,-l,1), \qquad (0,0,l),$$

donde l puede tomar cualquier valor entero.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: