Problema 16

(Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

i) Describir por extensión (es decir, enumerando todos sus elementos) el conjunto $A = \left\{ n \in \aleph^* \,\middle|\, \frac{n}{n-2001} \in \aleph \right\}$

ii) ¿Cuántas funciones $f : B \to B$ hay, siendo B el conjunto $B = \left\{ n \in \aleph \,\middle|\, \frac{n^{2001}}{n-2001} \in \aleph \right\}$?

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.

Inciso i:

$\frac{n}{n-2001} \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 0$, ó $n > 2001$ pero como $n \in \aleph^* \Rightarrow n > 2001$.

$n - 2001 | n \Leftrightarrow n - 2001 | n - (n - 2001) \Leftrightarrow n - 2001 | 2001$ entonces, como $n - 2001 > 0 \Rightarrow n - 2001 \in \{1, 3, 23, 29, 69, 87, 667, 2001\}$

$\Rightarrow A = \{2002, 2004, 2024, 2030, 2070, 2088, 2668, 4002\}$

Inciso ii:

$\frac{n^{2001}}{n-2001} \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 0$, ó $n > 2001$ pero como $n \in \aleph \Rightarrow n > 2001, n = 0$.

$n - 2001 | n^{2001} \Leftrightarrow n - 2001 | n^{2001} - n^{2000}(n - 2001) \Leftrightarrow n - 2001 | 2001 n^{2000}$,

supongamos ahora por inducción que $n - 2001 | n^{2001} \Leftrightarrow n - 2001 | 2001^k n^{2001-k}$ y esto se cumple hasta cierto k.

$n - 2001 | 2001^k n^{2001-k} \Leftrightarrow n - 2001 | 2001^k n^{2001-k} - 2001^k n^{2001-k-1}(n - 2001)$

$\Leftrightarrow n - 2001 | 2001^{k+1} n^{2001-(k+1)}$

Con lo que queda demostrado $\forall k \leq 2001$, entonces, haciendo $k = 2001$ tenemos que $\Leftrightarrow n - 2001 | 2001^{2001}$. Como $2001^{2001} = 3^{2001} \cdot 23^{2001} \cdot 29^{2001}$, quiere decir que tiene $(2001+1) \cdot (2001+1) \cdot (2001+1) = 2002^3$ divisores positivos. Entonces $|B| = 2002^3 + 1$ (contando $n = 0$), luego, cada $n_i \in B$ puede tomar en cada función que construya, cualquiera de los $2002^3 + 1$ valores disponibles en B, de donde se construirán un total de $(2002^3 + 1)^{2002^3+1}$. La generalización de este resultado es trivial.

Si B es el conjunto $B = \left\{ n \in \aleph \,\middle|\, \frac{n^m}{n-h} \in \aleph \right\}$, con $h = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ la descomposición canónica de h entonces existirán $\left[\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i m + 1) + 1 \right]^{\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i m + 1) + 1}$ funciones $f : B \to B$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI