

Problema 29:

(Propuesto, sin solución, en Norte de problemas, de Rey Pastor y Gallego Díaz)

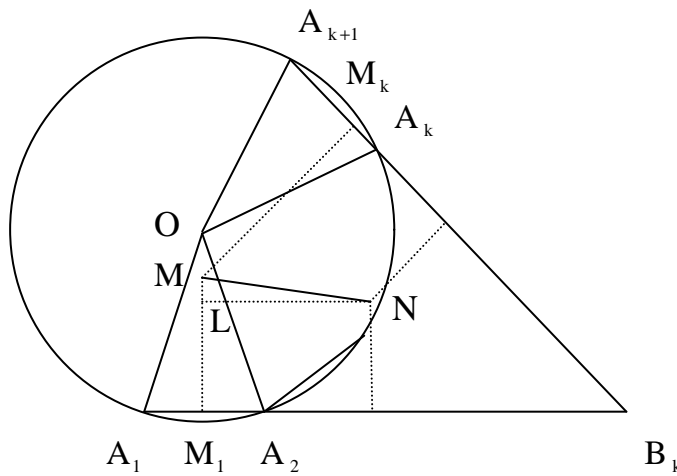
Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son las proyecciones de un segmento rectilíneo de longitud 1 sobre los n lados de un polígono regular, demostrar que

$$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = \frac{1}{2}nl^2$$

$$\alpha_1^4 + \dots + \alpha_n^4 = \frac{3}{8}nl^4$$

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.

Inscribamos una circunferencia al polígono regular:



Sea $MN = 1$. M_1 y M_k son las respectivas proyecciones de M sobre A_1A_2 y A_kA_{k+1} ($A_{n+1} = A_1$). Por la propiedad del ángulo exterior a una circunferencia:

$$\begin{aligned} \angle A_1B_kA_{k+1} &= \frac{\angle A_1OA_{k+1} - \angle A_2OA_k}{2} = \frac{2\pi[n - (k+1) + 1]}{2} - \frac{2\pi(k-2)}{2} \\ &= \frac{\pi[n - 2(k-1)]}{n} \end{aligned}$$

Supongamos que $\angle M_1MN = \alpha$. $\angle MM_kB_k = \angle MM_1B_k = \frac{\pi}{2}$ por ser M_1 y M_k

las respectivas proyecciones de M sobre A_1A_2 y A_kA_{k+1} . Entonces, por suma de ángulos interiores de un cuadrilátero:

$$\angle M_1MM_k = \pi - \frac{\pi[n - 2(k-1)]}{n} = \frac{2\pi(k-1)}{n}, \text{ restándole } \alpha, \text{ obtenemos que}$$

$$\angle M_kMN = \frac{2\pi(k-1)}{n} - \alpha, \text{ en consecuencia:}$$

$$\alpha_k = \left| \text{sen} \left[\frac{2\pi(k-1)}{n} - \alpha \right] \right|$$

Inciso a:

$$\alpha_k^2 = 1^2 \left\{ \text{sen} \left[\frac{2\pi(k-1)}{n} - \alpha \right] \right\}^2 \Rightarrow \alpha_k^2 = 1^2 \frac{1 - \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right]}{2}$$

Se trata de hallar ahora:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^n 1^2 \frac{1 - \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right]}{2} = \frac{1}{2} n l^2 - \frac{1}{2} l^2 \sum_{k=1}^n \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right]$$

Multipliquemos la sumatoria de cosenos por $\text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$ que será distinto de 0

pues $n \geq 3$, luego la dividimos y obtenemos el resultado.

$$\begin{aligned} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \sum_{k=1}^n \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] &= \sum_{k=1}^n \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \text{sen} \left[\frac{2\pi(2k-1)}{n} - 2\alpha \right] + \text{sen} \left[\frac{2\pi(3-2k)}{n} + 2\alpha \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \text{sen} \left[\frac{2\pi(2k-1)}{n} - 2\alpha \right] - \text{sen} \left[\frac{2\pi(2k-3)}{n} - 2\alpha \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \text{sen} \left[\frac{2\pi(2n-1)}{n} - 2\alpha \right] - \text{sen} \left[-\frac{2\pi}{n} - 2\alpha \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \text{sen} \left[\frac{2\pi(2n-1)}{n} - 2\alpha \right] + \text{sen} \left[\frac{2\pi}{n} + 2\alpha \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \text{sen} \left[\frac{\frac{2\pi(2n-1)}{n} - 2\alpha + \frac{2\pi}{n} + 2\alpha}{2} \right] \cos \left[\frac{\frac{2\pi(2n-1)}{n} - 2\alpha - \frac{2\pi}{n} - 2\alpha}{2} \right] \\ &= \text{sen}(2\pi) \cos \left[\frac{2\pi(n-1)}{n} - 2\alpha \right] \end{aligned}$$

= 0

Finalmente $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \frac{1}{2} n l^2$

Inciso b:

$$\begin{aligned} \alpha_k^4 &= 1^4 \frac{1 - 2 \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] + \left\{ \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] \right\}^2}{4} \\ &= 1^4 \frac{1 - 2 \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] + \frac{\cos \left[\frac{8\pi(k-1)}{n} - 4\alpha \right] + 1}{2}}{4} \end{aligned}$$

$$= 1^4 \frac{2 - 4 \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] + \cos \left[\frac{8\pi(k-1)}{n} - 4\alpha \right] + 1}{8}$$

$$= 1^4 \frac{3 - 4 \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] + \cos \left[\frac{8\pi(k-1)}{n} - 4\alpha \right]}{8}$$

Se trata de hallar ahora:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k^4 &= \sum_{k=1}^n 1^4 \frac{3 - 4 \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] + \cos \left[\frac{8\pi(k-1)}{n} - 4\alpha \right]}{8} \\ &= \frac{3}{8} n 1^4 - \frac{1}{2} 1^4 \sum_{k=1}^n \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] + \frac{1}{8} 1^4 \sum_{k=1}^n \cos \left[\frac{8\pi(k-1)}{n} - 4\alpha \right] \\ &= \frac{3}{8} n 1^4 + \frac{1}{8} 1^4 \sum_{k=1}^n \cos \left[\frac{8\pi(k-1)}{n} - 4\alpha \right] \end{aligned}$$

pues del inciso anterior sabíamos que $\sum_{k=1}^n \cos \left[\frac{4\pi(k-1)}{n} - 2\alpha \right] = 0$.

Si $n = 4 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \alpha_k^4 &= \frac{3}{2} 1^4 + \frac{1}{8} 1^4 \sum_{k=1}^4 \cos[2\pi(k-1) - 4\alpha] = \frac{3}{2} 1^4 + \frac{1}{8} 1^4 \sum_{k=1}^4 \cos(4\alpha) \\ &= \frac{3}{2} 1^4 + \frac{1}{2} 1^4 \cos(4\alpha) \end{aligned}$$

Si $n \neq 4 \Rightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{n} \right) \neq 0$, con $n \geq 3$.

Multipliquemos la sumatoria de cosenos por $\operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{n} \right)$ que será distinto de 0

pues $n \geq 3$ y $n \neq 4$, luego la dividimos y obtenemos el resultado.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{n} \right) \sum_{k=1}^n \cos \left[\frac{8\pi(k-1)}{n} - 4\alpha \right] &= \sum_{k=1}^n \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{n} \right) \cos \left[\frac{8\pi(k-1)}{n} - 4\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{4\pi(2k-1)}{n} - 4\alpha \right] + \operatorname{sen} \left[\frac{4\pi(3-2k)}{n} + 4\alpha \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{4\pi(2k-1)}{n} - 4\alpha \right] - \operatorname{sen} \left[\frac{4\pi(2k-3)}{n} - 4\alpha \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{4\pi(2n-1)}{n} - 4\alpha \right] - \operatorname{sen} \left[-\frac{4\pi}{n} - 4\alpha \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{4\pi(2n-1)}{n} - 4\alpha \right] + \operatorname{sen} \left[\frac{4\pi}{n} + 4\alpha \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} \left[\frac{\frac{4\pi(2n-1)}{n} - 4\alpha + \frac{4\pi}{n} + 4\alpha}{2} \right] \cos \left[\frac{\frac{4\pi(2n-1)}{n} - 4\alpha - \frac{4\pi}{n} - 4\alpha}{2} \right]$$

$$= \operatorname{sen}(4\pi) \cos \left[\frac{4\pi(n-1)}{n} - 4\alpha \right]$$

$$= 0$$

$$\text{Finalmente } \sum_{k=1}^n \alpha_k^4 = \frac{3}{8} n!^4$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

