PROBLEMA Nº 48:

Resolver la ecuación diofántica: $x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3 = z^2$

Solución:

La ecuación la podemos escribir de la siguiente forma:

$$x^2 \cdot (x+y) + y^2 \cdot (x+y) = z^2$$

$$(x+y) \cdot (x^2 + y^2) = z^2$$

Esta ecuación la podemos escribir como:

$$(x+y) \cdot (x^2 + y^2) = 1 \cdot z \cdot z$$

Se distinguen los siguientes casos:

Caso 1:

$$x + y = 1$$
$$x^2 + y^2 = z^2$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución en el campo de los números naturales porque

$$x + y = 1 \notin \mathrm{N}$$

Es decir, la suma de dos números naturales jamás puede darnos el valor 1.

Caso 2:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x + y = z^2$$

Caso no válido por las razones ya expuestas en ***Caso 1.***

Caso 3:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=z \\ x^2+y^2=z \end{array}\right\}$$

Despejando la variable $\underline{y}$ en la 1ª ecuación y sustituyéndola en la 2ª , nos quedará:

$$x^2+(z-x)^2=z \quad \rightarrow \quad x^2+z^2-2zx+x^2=z$$

$$2x^2-2zx+z^2-z=0$$

Utilizando como variable $\underline{x}$ resolvemos la ecuación de 2º grado.

$$x=\frac{2z\pm\sqrt{4z^2-8\cdot(z^2-z)}}{4}=\frac{2z\pm 2\cdot\sqrt{z^2-2\cdot(z^2-z)}}{4}$$

$$x=\frac{z\pm\sqrt{z\cdot(2-z)}}{2}$$

Se observa fácilmente que los únicos valores naturales para $\underline{z}$ que nos dan una raíz positiva son:

CASO 3.1: $z=1$

Obtenemos:

$x_1=1,\ y=0\notin \mathrm{N}$

$x_2=0\notin \mathrm{N}$

No hay soluciones válidas en este caso.

CASO 3.2: $z=2$

Obtenemos:

$x=1$, solución doble

$y=1$

Solución única: ***x = y =1*** ***z =2***

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI