Problema 56**, propuesto por J. L. Díaz Barrero, Barcelona, España.**
Los números de Lucas son $1,3,4,7,11,18,29,47,76,\ldots$ con $L_1=1, L_2=3$ y para todo $n\geq 2$ $L_k=L_{k-2}+L_{k-1}$.

Calcular la suma $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 18}-\ldots$

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.
Queremos hallar $\frac{1}{L_1L_2}-\frac{1}{L_2L_3}+\frac{1}{L_3L_4}-\frac{1}{L_4L_5}+\ldots$. Consideremos la sucesión de Fibonacci, $1,1,2,3,5,8,\ldots$, $F_1=1, F_2=1$ y para todo $n\geq 3$ $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$.
Comprobemos por inducción que $L_k=F_{k-1}+F_{k+1}$. Para $k=2:3=1+2$ y $k=3:4=1+3$ queda claro. A partir de ahí:
$L_{k+1}=L_k+L_{k-1}=(F_{k-1}+F_{k+1})+(F_{k-2}+F_k)=(F_{k-1}+F_{k-2})+(F_k+F_{k+1})=F_k+F_{k+2}$,
quedando demostrado.
Examinando los primeros valores, nos percatamos de que $S_n=\frac{1}{L_1L_2}-\frac{1}{L_2L_3}+\frac{1}{L_3L_4}-\frac{1}{L_4L_5}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{L_nL_{n+1}}=\frac{F_n}{L_{n+1}}$, verifiquémoslo también por inducción:

$$S_1=\frac{1}{L_1L_2}=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

$$S_{n+1}=S_n+(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{L_{n+1}L_{n+2}}=\frac{F_n}{L_{n+1}}+(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{L_{n+1}L_{n+2}}=\frac{F_nL_{n+2}+(-1)^{n+2}}{L_{n+1}L_{n+2}}=$$

$$=\frac{F_{n+1}}{L_{n+2}}\Leftrightarrow F_nL_{n+2}+(-1)^n=F_{n+1}L_{n+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_n(F_{n+1}+F_{n+3})+(-1)^n=F_{n+1}(F_n+F_{n+2})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2}=(-1)^{n+1}$$

Esto último probémoslo también por inducción: $F_1F_4-F_2F_3=3-2=(-1)^2$, ahora,
$F_{k+1}F_{k+4}-F_{k+2}F_{k+3}=-(F_kF_{k+3}-F_{k+1}F_{k+2})\Leftrightarrow F_{k+1}(F_{k+4}-F_{k+2})-F_{k+3}(F_{k+2}-F_k)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow F_{k+1}F_{k+3}-F_{k+3}F_{k+1}=0$

Con ello podemos asegurar que $S_n=\frac{F_n}{L_{n+1}}\ \forall n\in\aleph$. Apliquemos la recurrencia para ambas sucesiones que tienen el mismo polinomio característico $p(x)=x^2-x-1$ (cumplen que $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$ y $L_n=L_{n-2}+L_{n-1}$) cuyas raíces son $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Luego

$F_n=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, para $n=1$ tenemos $2=(A+B)+\sqrt{5}(A-B)$ y con $n=2:4=6(A+B)+2\sqrt{5}(A-B)$. Multiplicando la primera por 2 y restando ambas llegamos a que $B=-A$, sustituyendo en una de ellas $A=\frac{1}{\sqrt{5}}$, entonces $F_n=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$.

$L_n=C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, para $n=1$ tenemos $2=(C+D)+\sqrt{5}(C-D)$ y con $n=2:12=6(C+D)+2\sqrt{5}(C-D)$. Multiplicando la primera por 2 y restando ambas llegamos a que $C+D=2$, sustituyendo en una de ellas concluimos que $C=D=1$, entonces $L_n=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n}$.

$$S_n=\frac{F_n}{L_{n+1}}=\frac{\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}}{\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\frac{1}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\left(1+\sqrt{5}\right)^n}}{\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}}}=\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}$$

Observemos que $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$, ahora

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{L_iL_{i+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\right]\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\right]\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]}{\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\right]\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}(1)-\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right]}{\lim_{n\to\infty}(1)+\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}=\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{1-0}{1+0}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI