<u>Problema 57</u>, propuesto por J. B. Romero Márquez, Ávila, España.
(**Modificado por el editor**)
Estudiar las propiedades del triángulo especial en el que:

$$m_a\cdot (h_a-2r) = r^2$$

donde m_a es la longitud de la mediana desde A, h_a es la longitud de la altura desde A, y r es el radio del círculo inscrito.

<u>Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).</u>

Utilizaremos las expresiones relativas a la mediana, altura relativa al vértice A, m_a , h_a, y el radio r de la circunferencia inscrita en función de los lados del triángulo ABC, para poder desarrollar la condición dada en el enunciado:

$m_a\cdot (h_a-2r) = r^2$ o, equivalentemente: $$m_a^2=\left(\frac{r^2}{h_a-2r}\right)^2 \quad \text{(I)}$$

Para ello, sea:

$m_a^2 = 1/4\cdot(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

De la igualdad en las expresiones del área del triángulo ABC.

$[ABC]=\frac{1}{2}.a.h_a=p.r=\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$, donde 2p= a+b+c, deducimos que:

$$h_a=\frac{2}{a}.\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}{p}.$$

Por tanto, sustituyendo estos valores en la expresión (I) y, con un poco de cálculo, obtenemos:

$$\frac{1}{4}.(2b^2+2c^2-a^2)=\frac{a^2}{4}.\frac{(p-b)(p-c)}{p.(p-a)};\qquad (2b^2+2c^2-a^2)=\frac{a^2.(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c).(-a+b+c)}$$

Desarrollamos los productos anteriores e igualamos:

$$a^2.(a-b+c).(a+b-c)-(2b^2+2c^2-a^2).(a+b+c).(-a+b+c)=0;$$
$$a^4-a^2.(b-c)^2-(a^2-(b+c)^2).(a^2-2(b^2+c^2))=0$$

Simplificando términos semejantes, llegamos a:

$$a^4-a^2.(b-c)^2-a^4+a^2.(b+c)^2+2.a^2.(b^2+c^2)-2.(b+c)^2.(b^2+c^2)=0$$

$$a^2.[-(b-c)^2+(b+c)^2+2.(b^2+c^2)]-2.(b+c)^2.(b^2+c^2)=0$$

$$2.a^2.(b+c)^2 - 2.(b+c)^2.(b^2+c^2) = 0$$

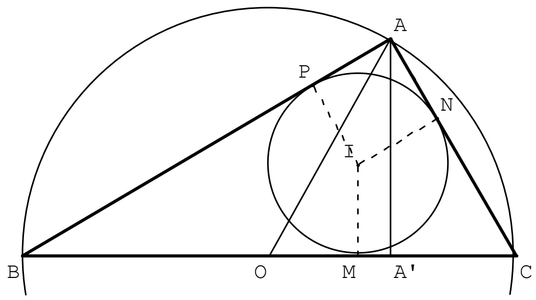
$$2.(b+c)^2[a^2-(b^2+c^2)] = 0\,.$$

Luego entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Condición esta última que revela que el triángulo ABC ha de ser rectángulo en A.

Veamos ahora que esta condición es también suficiente. Es decir, si el triángulo es rectángulo en A entonces se verifica la relación dada, $m_a \cdot (\, h_a - 2r) = r^2$
Para ello, sea la siguiente situación general de un triángulo rectángulo en A



Según este triángulo rectángulo en A, ABC, tenemos que:

IM = IP = IN = AP = AN= p–a = r

AO= m_a = a/2

AA'= h_a

Como [ABC]= 1/2·a·h_a = p·r, tenemos que h_a = (2·p·r)/a .
En definitiva, sustituyendo m_a y h_a por los valores encontrados:
m_a = a/2 ; h_a = (2·p·r)/a
vemos que, en efecto, se verifica la relación dada:
$m_a \cdot (\, h_a - 2r)$ = a/2·[(2·p·r) /a – 2r] = a/2 ·[(2·p·r – 2r·a) /a] = p·r – r·a = (p – a)·r = r·r = r^2 , **c.q.d.**

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: