

Problema 58, propuesto por J. B. Romero Márquez, Ávila, España.

Si p y q son números reales positivos, demostrar que

$$1 \leq \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}}$$

¿En qué condiciones se verifica la igualdad?

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.

Consideremos el polinomio $p(x) = x^2 - px - q$, observemos que sus raíces

$(x_1; x_2)$ son ambas reales, una positiva y la otra negativa: $x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$,

$x_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$. $x_2 < 0$ pues p y q reales positivos

$\Rightarrow p^2 + 4q > p^2 \Rightarrow \sqrt{p^2 + 4q} > p \Rightarrow 0 > p - \sqrt{p^2 + 4q} \Rightarrow 0 > x_2$. Debemos

demostrar que $1 \leq \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2x_1(-x_2)}} - \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2x_1}}$. Sea

$x_1 = |x_1| = a, x_2 = -|x_2| = -b$, sustituyamos:

$$1 \leq \frac{a + b}{\sqrt{2ab}} - \sqrt{\frac{a - b}{2a}}, \text{ como } p \text{ es positivo } a - b > 0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2ab} + \sqrt{b(a - b)} \leq a + b \Leftrightarrow \frac{a - b}{2} - \frac{2\sqrt{b(a - b)}}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{2\sqrt{2ab}}{2} + \frac{2b}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a - b} - b)^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{2b})^2}{2} \geq 0$$

Lo cual se verifica para cualquiera sean los valores positivos de $a, b, a - b$. La

igualdad se alcanza $\Leftrightarrow \sqrt{a - b} - b = 0$ y $\sqrt{a} - \sqrt{2b} = 0$, o sea $a = b^2 + b$ y

$a = 2b$, de donde $b^2 + b = 2b \Leftrightarrow b(b - 1) = 0$ pero como $b > 0 \Rightarrow b = 1, a = 2$ y

$x_1 = 2, x_2 = -1$. Por Vietta, $p(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow p = 1, q = 2$.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

