

Problema 58

Propuesto por J. B. Romero Márquez, Ávila, España.

$$1 \leq \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}}$$

Si p y q son números reales positivos, demostrar que

¿En qué condiciones se verifica la igualdad?

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba, España.a) Como $p > 0$ entonces la desigualdad anterior la podemos expresar de la siguiente manera:

$$1 \leq \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}}; \quad 1 \leq \sqrt{\frac{1 + 4 \frac{q}{p^2}}{2 \frac{q}{p^2}}} - \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{q}{p^2}}}}$$

Si llamamos a $x = \frac{q}{p^2} > 0$ y $f(x) = \sqrt{\frac{1+4x}{2x}} - \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1+4x}}}$, entonces probaremos que:

$$1 \leq f(x) = \sqrt{\frac{1+4x}{2x}} - \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1+4x}}}$$

$$\text{Para ello, como } f'(x) = \frac{-1}{4x^2} \sqrt{\frac{2x}{1+4x}} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4x}}}{\sqrt{1+4x} (1+\sqrt{1+4x})^2} \quad (I)$$

$$f'(x)=0 \text{ si y solo si } \frac{1}{4x^2} \sqrt{\frac{2x}{1+4x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4x}}}{\sqrt{1+4x} (1+\sqrt{1+4x})^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambas expresiones e igualamos, obtenemos:

$$\frac{1}{8x^3 \cdot (1+4x)} = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{(1+4x) \cdot (1+\sqrt{1+4x})^4}; \quad \frac{1}{8x^3} = \frac{1}{(1+\sqrt{1+4x})^3};$$

$$\text{Es decir: } 2x - 1 = \sqrt{1+4x}$$

Elevando de nuevo al cuadrado, obtenemos: $4x^2 - 4x + 1 = 1 + 4x$;En definitiva: $x \cdot (x - 2) = 0$; Como $x > 0$ entonces $x = 2$.Comprobamos al sustituir en (I) que, en efecto, $x = 2$ es solución válida para $f'(x) = 0$.Como $y = f(x)$ es continua para todo $x > 0$ y además se verifica que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ y
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2},$$
 resulta que $x = 2$ es el mínimo absoluto de la función $f(x)$.
Luego: $f(2) \leq f(x)$; $\forall x > 0$ Como quiera que $f(2) = 1$, se tiene que, en efecto, $1 \leq f(x)$; $\forall x > 0$, **c.q.d.**b) Se verifica la igualdad cuando únicamente $x = 2$, es decir, si $2 = \frac{q}{p^2}$.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

