José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.es

Problema 59

Propuesto por J. B. Romero Márquez, Ávila, España.

Sea $a > 0$. Calcular

$$\lim_{a\to 1}\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x)(1+ax)}.$$

Solución por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.

Descomponiendo el integrando en fracciones simples, resulta

$$\frac{1}{(a+x)(1+ax)} = \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{a+x} - \frac{a}{1+ax}\right)$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 1}\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x)(1+ax)} &= \lim_{a\to 1}\left\{\frac{1}{1-a^2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{a+x} - \frac{a}{1+ax}\right) dx\right\} \\
&= \lim_{a\to 1}\left\{\frac{1}{1-a^2}\left[\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right)\right]_0^\infty\right\} \\
&= \lim_{a\to 1}\left\{\frac{1}{1-a^2}\left(\ln\frac{1}{a} - \ln a\right)\right\} \\
&= \lim_{a\to 1}\left\{\frac{2\ln a}{a^2-1}\right\} \quad \text{(Aplicando L'Hopital)} \\
&= \lim_{a\to 1}\frac{1}{a^2} = 1
\end{aligned}$$

y hemos terminado.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI