Problema 60, propuesto en la Escuela Especial de Ingenieros de Montes, 1942.

Resolver en los números enteros la ecuación

$xyz = xy + yz + zx$

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.

Como tengo tres variables, al menos 2 tienen el mismo signo. Sean estas $y, z \Rightarrow yz \geq 0$. Despejando x en $xyz = xy + yz + zx \Rightarrow x(yz - y - z) = yz$ $\Rightarrow x = \dfrac{yz}{yz - y - z}$, si $yz - y - z \neq 0$. $x - 1 = \dfrac{y+z}{yz - (y+z)}$ también es entero. Entonces $|y + z| \geq |yz - (y + z)| \Rightarrow (y + z)^2 \geq (yz)^2 - 2yz(y + z) + (y + z)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow yz(2y + 2z - yz) \geq 0 \Rightarrow 2y + 2z \geq yz$ si $yz \neq 0$. Como y, z tienen el mismo signo y $2y + 2z \geq yz > 0$ entonces ambas son positivas. Sea $y \geq z \geq 1$ sin pérdida de generalidad.

Supongamos primero que $z \geq 5 \Rightarrow 2z \geq y(z - 2) \geq 3y \geq 3z$ ¡contradicción! Luego $1 \leq z \leq 4$.

Si $z = 1 \Rightarrow xy = xy + y + z \Leftrightarrow y = -z$

Si $z = 2 \Rightarrow 2y - y - 2 | y + 2 \Leftrightarrow y - 2 | y + 2 \Leftrightarrow y - 2 | y + 2 - (y - 2) \Leftrightarrow y - 2 | 4 \Leftrightarrow$ $y - 2 \in \{-4; -2; -1; 0; 1; 2; 4\} \Leftrightarrow y \in \{-2; 0; 1; 2; 3; 4; 6\}$ pero como $y \geq z = 2$, cuando sustituimos cada valor, para $y = 2 \Rightarrow yz = y + z$;

$$x_1 = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 3 - 2} = 6; x_2 = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 4 - 4 - 2} = 4; x_3 = \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot 6 - 6 - 2} = 3$$

Si $z = 3 \Rightarrow 2y + 6 \geq 3y \Rightarrow 6 \geq y \geq 3 \Rightarrow y \in \{3; 4; 5; 6\}$ probando todos los valores

$$x_4 = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 - 3 - 3} = 3; x_5 = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 4 - 4 - 3} \notin Z; x_6 = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5 - 5 - 3} \notin Z; x_7 = \frac{3 \cdot 6}{3 \cdot 6 - 6 - 3} = 2$$

Si $z = 4 \Rightarrow 2y + 8 \geq 4y \Rightarrow 4 \geq y \geq 4$. Cuando $y = z = 4 \Rightarrow x_8 = \dfrac{4 \cdot 4}{4 \cdot 4 - 4 - 4} = 2$

Faltaría analizar qué sucede, primero si $z = 0$ (lo asumimos como mínimo entre y, z): $\Rightarrow 0 = xy$ y segundo si $yz = y + z \Rightarrow yz = 0 \Rightarrow z = y = 0$. Finalmente las soluciones son $(1; y; -y)$ con $y \in Z$, $(6;3;2); (4;4;2); (3;3;3)$ y $(0;0;y)$ con $y \in Z$ y todas sus reordenaciones.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI