

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (13)

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA FASE NACIONAL DE LA XL OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Ciudad Real, marzo de 2004

Primer día (26 de marzo)

Problema 1

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas, y la primera y última columnas, son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

Problema 2

$ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera, P y Q los puntos medios de las diagonales BD y AC , respectivamente. Las paralelas por P y Q a la otra diagonal se cortan en O .

Si unimos O con los cuatro puntos medios de los lados ($X \in AB$, $Y \in BC$, $Z \in CD$, $T \in DA$) se forman cuatro cuadriláteros $OXBY$, $OY CZ$, $OZDT$, $OTAX$.

Demostrar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.

Problema 3

Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones

$$f : Z \rightarrow Z,$$

tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica

$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

Segundo día

(27 de marzo)

Problema 4

¿Existe alguna potencia de 2, que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2? Justificar la respuesta.

Problema 5

Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo ABC , la mediana desde B sea dividida en tres partes iguales por la circunferencia inscrita en el triángulo, es

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}.$$

Problema 6

Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha con la cara **negra** hacia arriba, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

