

Problemas propuestos en la IMO 2004 (Atenas, Grecia)

Primera sesión:

Problema 1:

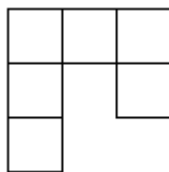
Sea ABC un triángulo acutángulo con AB distinto de AC . El círculo con diámetro BC corta a los lados AB y AC en M y N , respectivamente. Sea O el punto medio del lado BC . Las bisectrices de los ángulos BAC y MON se cortan en R . Prueba que las circunferencias circunscritas de los triángulos BMR y CNR tienen un punto común sobre el lado BC .

Problema 2:

Encuentra todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la igualdad:
 $P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$,
Para cualesquiera números reales a, b, c tales que $ab+bc+ca=0$.

Problema 3:

Se define un *gancho* como una figura con seis cuadrados unidad como muestra el diagrama



o cualquiera de las figuras obtenidas aplicando rotaciones y reflejando la figura.

Determina todos los rectángulos $m \times n$ que pueden ser cubiertos con ganchos de manera que

El rectángulo esté cubierto sin agujeros ni superposiciones.

Ninguna parte de un gancho se queda fuera del rectángulo.

Segunda sesión:

Problema 4:

Sea n mayor o igual que 3 un entero. Sean t_1, t_2, \dots, t_n números reales positivos tales que $n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n)(1/t_1 + \dots + 1/t_n)$

Demostrar que t_i, t_j, t_k son las medidas de los lados de un triángulo para todos los i, j, k con 1 menor o igual que $i < j < k$ menor o igual que n

Problema 5:

En un cuadrilátero convexo $ABCD$ la diagonal BD no es la bisectriz ni del ángulo ABC ni del CDA . Un punto P en el interior de $ABCD$ verifica $\angle PBC = \angle DBA$ y $\angle PDC = \angle BDA$.

Demostrar que los vértices del cuadrilátero $ABCD$ pertenecen a una circunferencia si y solo si $AP = CP$

Problema 6:

Un entero positivo es *alternante* si, en su representación decimal, en toda pareja de dígitos consecutivos uno es par y el otro impar.

Encontrar todos los enteros positivos n tales que n tiene un múltiplo que es alternante.