

Problema 62

Propuesto por el Prof. José Luis Díaz Barrero, Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.

Calcular la integral

$$\int_{2003}^{2004} \frac{\sqrt[3]{2004-x}}{\sqrt[3]{2004-x} + \sqrt[3]{x-2003}} dx .$$

Definiremos $I(a,b)$ como sigue y probaremos el siguiente resultado más general:

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{(b-x)^c}{(b-x)^c + (x-a)^c} dx = \frac{b-a}{2} ,$$

donde a, b y c son reales cualesquiera. Para ello, consideraremos en la anterior integral los cambios de variable $y=x-a, z=b-x$, que llevan a

$$I(a,b) = \int_0^{b-a} \frac{(b-a-y)^c}{(b-a-y)^c + y^c} dy ; \quad I(a,b) = - \int_{b-a}^0 \frac{z^c}{z^c + (b-a-z)^c} dz .$$

Se tiene entonces sumando ambas expresiones y haciendo $z=y$ que

$$2I(a,b) = \int_0^{b-a} \frac{(b-a-y)^c + y^c}{(b-a-y)^c + y^c} dy = \int_0^{b-a} dy = b-a ,$$

de donde el resultado general propuesto es obvio. Como $2004-2003=1$, se tiene que la integral propuesta vale $\frac{1}{2}$.