

VI Olimpiada Balcánica Junior (2002)

Problema 1. Sea ABC un triángulo isósceles, con $AC=BC$, y sea P un punto de su circunferencia circunscrita, situado en el arco AB que no contiene a C . Sea D el pie de la perpendicular trazada desde C a la recta PB .

Demostrar que $PA+PB=2\cdot PD$.

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Solución 1

Consideremos sobre la prolongación de PB el punto E tal que $BE=PA$.

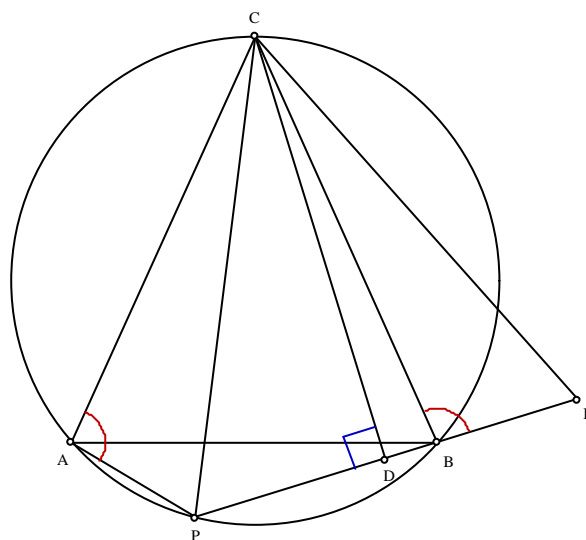
Los triángulos CAP y CBE son iguales porque $BE=PA$ (por construcción), $CA=CB$ (por hipótesis) y $\angle CAP=\angle CBE$ (pues ambos son suplementarios del $\angle PBC$).

Por tanto, $CP=CE$.

Así, pues, $\triangle CPE$ es isósceles y, en este triángulo, el punto D , como pie de la altura correspondiente al vértice C , es el punto medio de su base PE .

Por consiguiente,

$$2\cdot PD=PE=PB+BE=PB+PA.$$



Solución 2

Sea M el punto medio de AB y Q el punto de intersección de CP y AB .

Pues

$$\angle APC \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{por inscritos} \\ \text{en el mismo} \\ \text{arco}}}{=} \angle ABC \stackrel{\substack{\uparrow \\ \Delta ABC \\ \text{isósceles}}}{=} \angle CAB \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{por inscritos} \\ \text{en el mismo} \\ \text{arco}}}{=} \angle CPQ,$$

los triángulos AQC y PAC , así como los BCQ y PCB , son semejantes. Por tanto,

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{PC}{AC} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{por} \\ \text{hipótesis}}}{=} \frac{PC}{BC} = \frac{PB}{QB} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{propiedad} \\ \text{de las} \\ \text{proporciones}}}{=} \frac{PA+PB}{AQ+QB} = \frac{PA+PB}{AB} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{definición} \\ \text{del punto } M}}{=} \frac{PA+PB}{2 \cdot AM}$$

de donde

$$PA+PB = 2 \cdot \frac{AM \cdot PC}{AC} \quad (1)$$

También son semejantes los triángulos rectángulos AMC y PDC ; por tanto,

$$\frac{PD}{PC} = \frac{AM}{AC}$$

y

$$PD = \frac{AM \cdot PC}{AC}.$$

Sustituimos este último resultado en (1) y se obtiene la relación pedida.

