Problema 61

Propuesto por el Prof. Laurentiu Modan, Univ. De Bucarest.

Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2}.$$

i) Demostrar que:

$$\frac{4007}{2004} \leq S_{2004} \leq \frac{8015}{4008}.$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [2,4]$.

Este enunciado tal y como se muestra aquí debe ser incorrecto, por la razón de que, para todo entero positivo *n*,

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{p^2}{6} < \frac{4007}{2004} < 2.$$

Para calcular el límite de la suma basta con considerar la expansión de sin(x):

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{\left(x^2\right)^2}{5!} - \frac{\left(x^2\right)^3}{7!} + \ldots\right).$$

Como sin(x)=0 si y sólo si $x=np$, para cualquier entero n, se tiene entonces que $p^2,(2p)^2,(3p)^2,\ldots$ son las raíces de

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \ldots = 0.$$

Por Vieta-Cardano, la suma de las inversas de las raíces es igual al opuesto del cociente entre el coeficiente lineal y el término independiente, es decir:

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(2p)^2} + \frac{1}{(3p)^2} + \ldots = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por p^2 se obtiene el resultado anteriormente empleado para deducir que el enunciado tal y como aparece aquí debe ser incorrecto.