Problema 68

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía.

Se considera la función real

$$f\left(x,n\right)=\frac{\left(x+1\right)^{n+1}+\left(x-1\right)^{n+1}}{\left(x+1\right)^{n+1}-\left(x-1\right)^{n+1}}\text{, con } n \text{ natural.}$$

Hallar los valores del parámetro *n* tales que *f* tiene el mayor número posible de asíntotas, y en tal caso, hallar sus ecuaciones.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

La función *f* puede tener tres tipos distintos de asíntotas:

1) Asíntotas horizontales si su límite al tender *x* a infinito (positivo o negativo) es un valor real.
2) Asíntotas oblicuas si el límite de su derivada al tender *x* a infinito (positivo o negativo) es un valor real.
3) Asíntotas verticales si el límite de la función para algún *x* real es infinito. Para ello es necesario (aunque no suficiente) que el denominador de *f* se anule para dicho valor real de *x*.

Podemos desarrollar los binomios del numerador y denominador de *f* para obtener:

$$f\left(x,n\right)=\frac{\sum_{\substack{m=0\\ m\text{ par}}}^{n+1}\binom{n+1}{m}x^{n+1-m}}{\sum_{\substack{m=0\\ m\text{ impar}}}^{n+1}\binom{n+1}{m}x^{n+1-m}}=\frac{x^{n+1}+\binom{n+1}{2}x^{n-1}+\binom{n+1}{4}x^{n-3}+\ldots}{\left(n+1\right)x^{n}+\binom{n+1}{3}x^{n-2}+\binom{n+1}{5}x^{n-4}+\ldots}$$

$$=\frac{x}{n+1}+\frac{\frac{n+2}{3}\binom{n}{1}x^{n-1}+\frac{n+2}{5}\binom{n}{3}x^{n-3}+\ldots}{\left(n+1\right)x^{n}+\binom{n+1}{3}x^{n-2}+\ldots}.$$

Es por lo tanto obvio que, al ser nulo el límite del segundo sumando del último miembro cuando *x* tiende a infinito (positivo o negativo), la recta $y=x/(n+1)$ es asíntota oblicua de $f(x,n)$ cuando *x* tiende a infinito (positivo o negativo) y para cualquier valor del parámetro *n*.

Falta comprobar si $f(x,n)$ tiene también asíntotas verticales. Obviamente, el denominador se puede anular sólo si los valores absolutos de $x+1$ y $x-1$ son iguales, lo cual puede suceder solamente si $x=0$. Adicionalmente, los signos de $(x+1)^{n+1}$ y $(x-1)^{n+1}$

deben ser iguales, para lo que $n$ debe ser impar. El numerador de $f(x,n)$, para $n$ impar y $x=0$, vale 2, luego el valor de $n$ que maximiza el número de asíntotas de $f(x,n)$ es cualquier $n$ impar, siendo entonces las asíntotas las rectas de ecuaciones $x=0$ y $y=x/(n+1)$. No hay otras asíntotas posibles para ningún valor de $n$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI